

# 二軸応力下でのひずみ増分方向の測定と 関連流動則の適用範囲に関する研究

大同大学 機械工学科  
教授 蔦森 秀夫  
(2022年度 一般研究開発助成 AF-2022007-B2)

キーワード：関連流動則，プレス成形シミュレーション

## 1. 研究の目的と背景

現在、金型の試作において、ワレ、シワ、スプリングバックなどの成形不良を未然に防ぐ方法として、プレス成形シミュレーションによる事前予測が用いられている。市販のプレス成形シミュレーションソフトには関連流動則が用いられており、関連流動則の成立性や適用範囲を知ることは、シミュレーションの精度向上に寄与する。関連流動則では塑性ひずみ増分方向は塑性ポテンシャルの勾配の向きになっており、応力増分の影響を受けない。これらを実験的に確認する研究は古くから行われている。1955年 Naghdi らは、24S-T4 アルミニウム合金製の薄肉円管試験片を用いた引張ねじり試験を行った。引張方向に振動させながらねじりを付与する経路の実験を行い、ひずみ増分方向は応力増分と相関があるという結果を得ている<sup>1)</sup>。1962年、Burton らは同じく円管試験片を用いて、引張とねじりを交互に付与する実験を行ったが、ひずみ経路はスムーズであり、応力増分の影響は確認できなかった<sup>2)</sup>。同年の Bertsh らによる A6061-T6 を用いた同様な研究でも、ひずみ増分方向について、応力増分の影響を確認できなかった<sup>3)</sup>。1968年に Shiratori らは二軸引張試験機を製作し、黄銅を用いたジグザグの応力経路の二軸引張試験を行った。ひずみ増分は滑らかであり、応力増分の影響は確認できなかった<sup>4)</sup>。2018年、吉田らは電磁純鉄円管試験片を使った引張ねじり試験を行い、同一応力状態におけるひずみの線形経路および非線形経路のひずみ増分方向を比較し、方向が異なり、応力増分の影響を受けることを示している<sup>5)</sup>。以上のように、ひずみ増分が応力増分の影響を受けないという結果と受けるという結果が混在している。

本研究では、板厚 1mm の軟鋼板(SPC270D)を使い、二軸引張試験の実験結果を基に、線形経路と非線形経路において塑性ひずみ増分方向が一致するかを調べた。本手法によって、法線方向が一致すれば、測定範囲において関連流動則が成り立つことが強く示唆され、一致しなければ、線形経路または非線形経路のどちらかまたは両方ともにおいて関連流動則が成立していないことになる。

## 2. 塑性ひずみ増分方向の測定方法

### 2.1 供試材の機械的特性値

JIS5号片を用いて単軸引張試験を行った。試験片の切り出し方向は圧延方向と圧延垂直方向、圧延方向に対して

表1 供試材の機械的特性値				
方向	0.2%耐力 /MPa	引張強さ /MPa	n 値 ( $\varepsilon^p = 0.1$ )	r 値 ( $\varepsilon^p = 0.1$ )
0°	162.1	289.9	0.2505	2.30
45°	175.5	297.2	0.2496	1.53
90°	166.5	284.8	0.2474	2.60

45° の 3 方向である。表1に供試材の機械的特性値の測定結果を示す。n 値、r 値は各方向の塑性ひずみが 0.1 のときの値を示す。

### 2.2 二軸引張試験機

線形経路および非線形経路の実験を行うために使用した試験機は図1に示す国際計測製 Kokusai, KBAT-100-SMHP である。ひずみの計測には ISO 規格<sup>6)</sup>ではひずみゲージとなっているが、本研究では GOM 社の DIC システム ARAMIS を使用し、0.5 秒間隔で画像を取得する。応力は試験機付属のロードセルから荷重を 0.05 秒間隔で取得し、試験片腕部の初期断面積で除して得る。この試験機はフィードバック制御により、一定の荷重比の試験が可能である。相当塑性ひずみ 1%となるまで 180 秒かけて荷重を付加した。さらに、荷重比を途中で変更させることも可能であり、非線形の経路の試験やジグザク経路の試験も可能となっている。

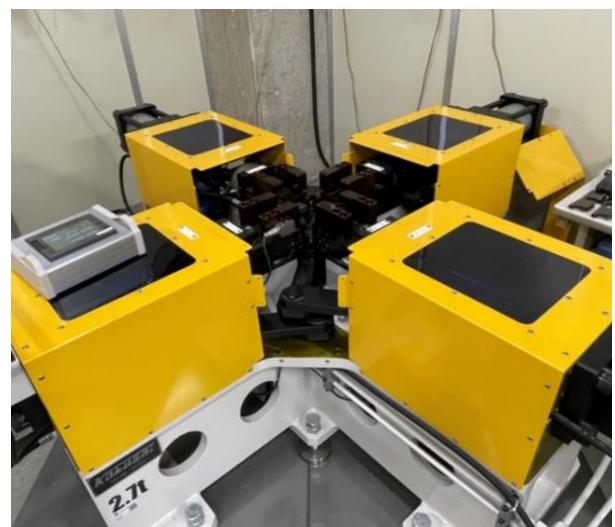


図1 二軸引張試験機

### 2.3 塑性ひずみと塑性ひずみ増分比（方向）の取得

二軸引張試験は図2のような十字型試験片を用いて、試験を行う。この試験片形状はISO規格にて、中央部応力が均一になるようにスリットが設定されている。ひずみの計測には前述のDICシステムを使用し、中央の30mm×30mmの領域（図3）にて算術平均により算出した。公称ひずみの圧延方向成分を $\epsilon_x$ 、圧延垂直方向の成分を $\epsilon_y$ とすれば、真ひずみ $\epsilon_x$ 、 $\epsilon_y$ は式(1)のようになる。弾性ひずみの各成分 $\epsilon_x^e$ 、 $\epsilon_y^e$ は式(2)のようになるため、塑性ひずみの各成分は式(3)で表される。ここで $E$ は縦弾性係数、 $\nu$ はポアソン比、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ は真応力の圧延方向成分、圧延垂直方向成分、板厚方向成分である。

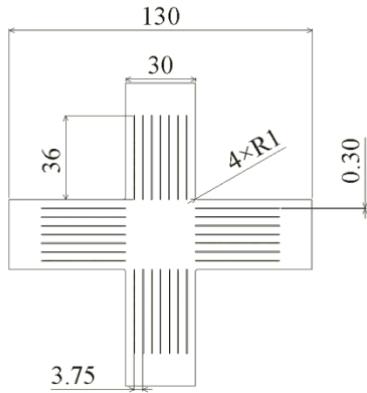


図2 二軸引張試験に用いた十字型試験片

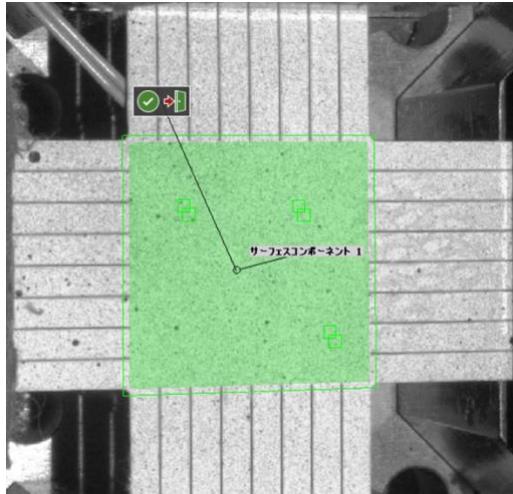


図3 ひずみの測定領域

$$\epsilon_x = \ln(1 + e_x), \quad \epsilon_y = \ln(1 + e_y) \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_x^e = \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \epsilon_y^e = \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\epsilon_x^p = \epsilon_x - \epsilon_x^e, \quad \epsilon_y^p = \epsilon_y - \epsilon_y^e \quad (3)$$

以上のように、塑性ひずみの各成分を時間的に連続に取得することができる。次に塑性ひずみの $x$ 成分または $y$ 成

分を横軸に、横軸の対になる成分を縦軸に取ると図4のようになる。図4では横軸に $y$ 塑性ひずみ、縦軸に $x$ 塑性ひずみを取っている。経路Aと経路Bの2種類の経路のグラフとなっている。これらを4次の多項式に近似し、多項式を微分して、必要とする横軸の値を代入することで塑性ひずみ増分比 $d\epsilon_x^p/d\epsilon_y^p$ を得ることができ、容易に塑性ひずみ増分方向ベクトル( $\lambda d\epsilon_x^p, \lambda d\epsilon_y^p$ )を得る。ここで $\lambda$ は任意の定数。経路Bは単調減少、経路Aは極値を持つ。極値を持つ場合、極値が縦軸に存在するように縦軸と横軸を振り分ける。逆にとると塑性ひずみ増分比が無限大となり数値的な取り扱いが困難となる。本研究では本手法によりひずみ増分比を得た。本手法では多少のノイズがあるデータであっても比較的安定した値を取得することができる。

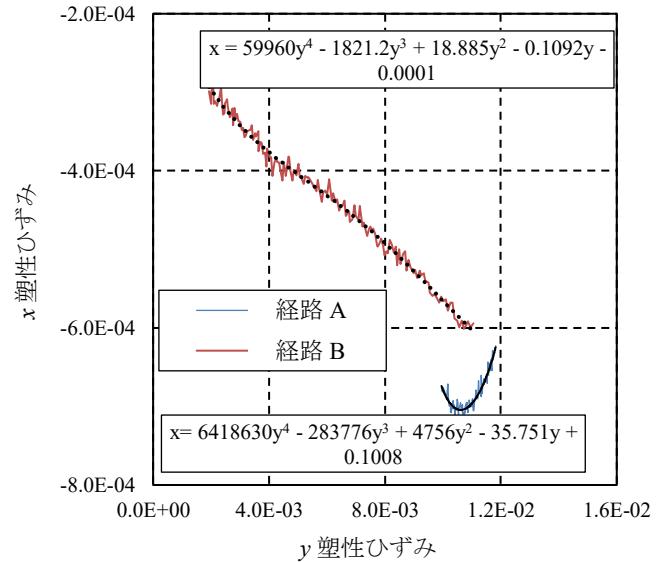


図4 塑性ひずみ増分比の算出方法

### 3. 線形経路、非線形経路の実験

#### 3.1 試験経路

試験経路を図5および図6に示す。横軸は $x$ 荷重、縦軸は $y$ 荷重である。曲線は等塑性仕事面である。等塑性仕事面は0:1、1:2、1:1、2:1、1:0の線形経路二軸引張試験および単軸引張試験の結果から、塑性仕事が等しい応力点を算出し、その応力点と塑性ひずみ増分方向が等塑性仕事面の法線になるとしてスプライン曲線（ベジエ曲線群）として作成した。非線形経路は荷重比1:2、2:1の線形経路を基にした。相当塑性ひずみが1%から荷重を変化させ、線形経路のひずみ増分方向（関連流動則を仮定すれば降伏曲面法線方向）になるように荷重比を指示した。このあと、荷重比が1:2のとき、公称応力換算で $y$ 応力が、荷重比2:1のときは $x$ 応力が $\alpha$ MPa ( $\alpha = 1, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60$ )増加させたタイミングでさらに荷重比を変化させた。最初に荷重比を変更した点を第1屈折点、つぎに荷重比を変更した点を第2屈折点と定義する。第2屈折点での荷重比は除荷が含まれないような角度（荷重比1:2のとき80°、荷重比2:1のとき78°）とした。これらの経

路では線形経路と非線形経路で公称応力空間に交点が存在し、この交点における線形、非線形それぞれの塑性ひずみ増分方向を調べる。

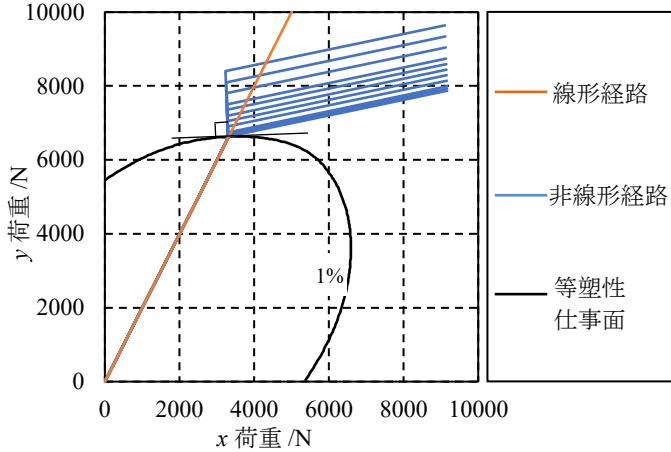


図 5 荷重比 1 : 2 基準の線形および非線形試験経路

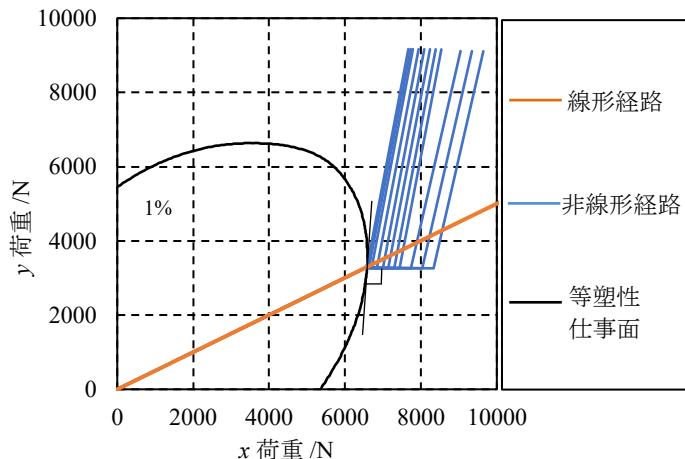


図 6 荷重比 2 : 1 基準の線形および非線形試験経路

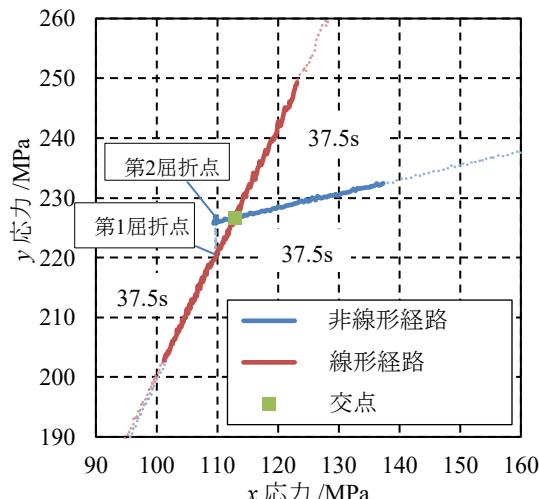


図 7 ひずみ増分比の算出範囲

### 3.2 ひずみ増分比の算出区間

ひずみ増分比の算出方法は既に述べたが、近似曲線を作った範囲について述べておく。図 7 のように線形経路と非線形経路の交点を基準とし、線形経路では交点前後 37.5 秒（ひずみデータ換算すると 150 点）を用いて図 4 のような近似曲線を作成した。非線形経路では図 7 で示す通り、第 2 届折点から交点までと交点以降 37.5 秒とした。非線形経路の場合、時間的に 37.5 秒内であっても第 1 届折点から第 2 届折点までのひずみデータは近似曲線の作成区間に含めなかった。

### 3.3 応力経路とひずみ増分方向の実験結果

図 8 に荷重比 1 : 2 周辺での実験結果を示す。横軸が  $x$  真応力、縦軸が  $y$  真応力とした。図中には線形経路および非線形経路のそれぞれの応力経路の実験値および塑性ひずみ増分方向を矢印で記載してある。暖色系の色が線形経路、寒色系の色が非線形経路のものである。応力経路は出力された荷重を真応力に変換したのみで、ほぼ指示通りの荷重が取得できているものの、直線的な指示に対して若干のノイズも確認できる。また、応力が高くなるとノイズも大きくなる傾向も確認できる。矢印は応力が低いとほぼ重なっているように見えるが、応力が大きくなるにつれて非線形経路の矢印が右側にずれてきているように見える。つまり、塑性ひずみ増分方向は応力増分方向または偏差応力増分方向にズれるような方向に変化している。同様に、応力比 1 : 2 付近を図 9 に示す。この範囲でも同様の傾向が確認できる。非線形経路の応力増分ベクトルの終点は画面上側に少しだけズれており、これは応力増分方向に合致する。以上のように、2 経路において非線形経路では線形経路の塑性ひずみ増分方向と一致せず、応力増分方向にズれる傾向があることが確認できた。

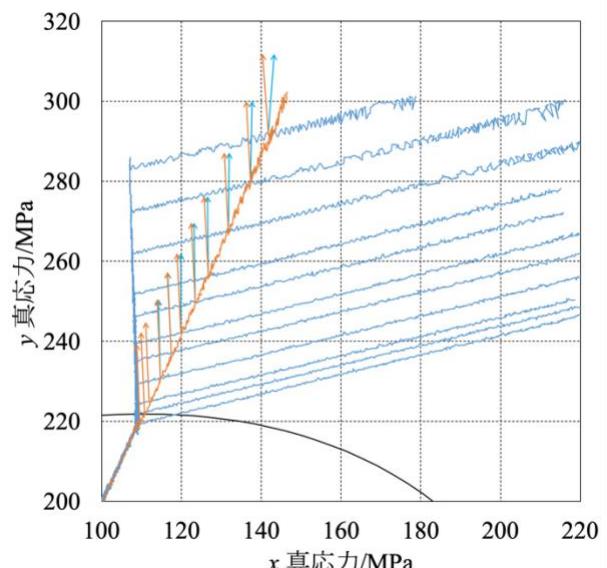


図 8 応力比 1 : 2 線形経路と非線形経路

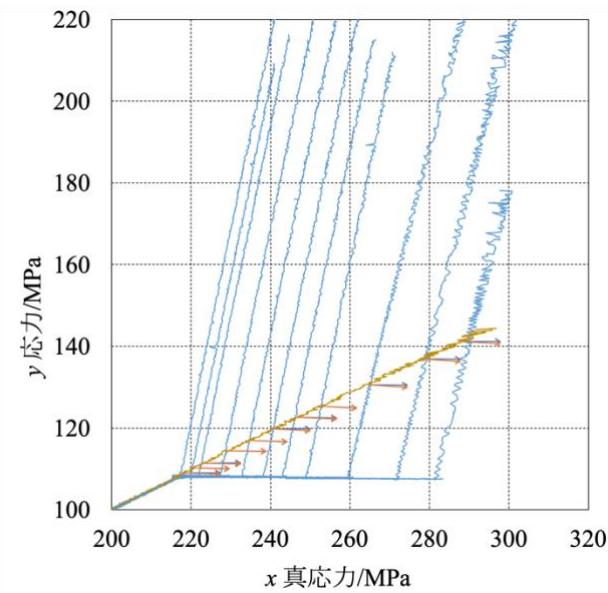


図9 応力比2:1線形経路と非線形経路

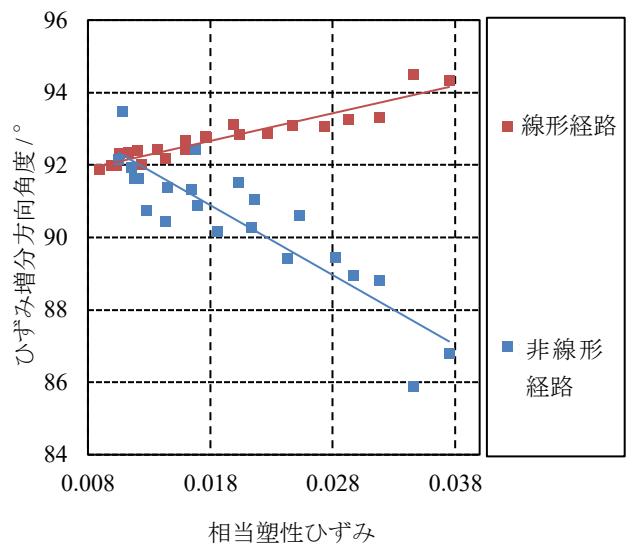


図10 応力比1:2周りのひずみ増分方向角度

### 3.4 相当塑性ひずみと塑性ひずみ増分方向の関係

次に、相当塑性ひずみと塑性ひずみ増分方向の関係を調べた。相当塑性ひずみは圧延方向の単軸引張試験の塑性ひずみを基準とし、塑性仕事が等しくなるよう実験結果から算出した。角度は図8または図9の横軸を $0^\circ$ とし、縦軸位置 $90^\circ$ に定める。1周が $360^\circ$ である。 $2:1$ 周りも $1:2$ 回りのどちらも線形経路と非線形経路のひずみ増分方向には差があり、相当塑性ひずみが大きくなるにつれて差が拡大することが確認できる。 $1:2$ で最大 $8^\circ$ 程度、 $2:1$ では非線形経路のひずみ増分方向のバラツキが大きかったが、最大で $4^\circ$ 程度の差が明確に確認できる。

## 4. 結言

二軸引張試験を用いて、線形経路と非線形経路の変形試験を行い、同一応力における異経路の塑性ひずみ増分方向を調べた。結果を下記にまとめる。

- 同一応力点の塑性ひずみ増分方向は、線形経路に対して非線形経路は応力増分方向または偏差応力増分方向に変化する。
- 非線形経路の塑性ひずみ増分方向の変化量を角度に換算すると、ひずみ増分方向角度は相当塑性ひずみに比例的に大きくなり、応力比 $1:2$ では相当塑性ひずみ約 $3.8\%$ で最大 $8^\circ$ 程度、 $2:1$ では相当塑性ひずみ約 $3.3\%$ で最大 $4^\circ$ 程度であった。

以上から、非線形経路において関連流動則が厳密には成立していないことが強く示唆された。また、非線形経路に伴って、降伏曲面が移動するなど、降伏曲面が線形経路と異なることも考えられ、それらの影響についての検討も必要と思われる。さらに、今回の実験は応力比 $1:2$ および $2:1$ 付近の実験に留まっており、これら以外の応力比における変形の振る舞いも同様のことが確認できるか調査が必要と思われる。

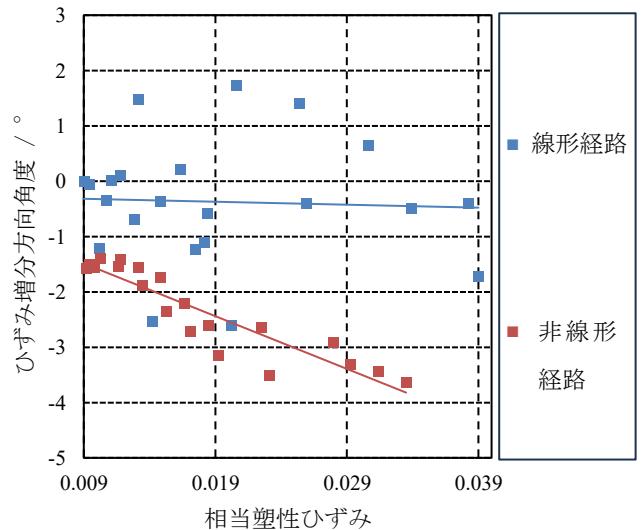


図11 応力比2:1周りのひずみ増分方向角度

## 謝 辞

本研究では公益財団法人天田財団のご援助により、二軸応力下での塑性ひずみ増分方向の測定方法を確立し、非線形経路においては関連流動則が成立していないことが強く示唆されることを実験的に示すことができました。さらに、非線形経路と線形経路の塑性ひずみ増分方向の差に規則性があることも分かったため、次の研究への足掛かりができました。ここに公益財団法人天田財団に心より感謝の意を表します。

## 参考文献

- P.M.Naghdi, J.C.Rowley and C.Beadle: J. Appl. Mech., **22**(1955), 416.
- B.Paul, :U.S. National Cong. of Applied Mechanics, ASME, New York,**4** (1962), 1031.

- 3) P.K.Bertsch :U.S. National Cong. of Applied Mechanics,  
ASME, New York, 4(1962), 893.
- 4) E. Shiratori and K. Ikegami: J. Mech. Phys. Solids,  
**16**(1968), 373.
- 5) 吉田健吾:鉄と鋼, 104-1 (2018), 54.
- 6) ISO 16842:2024.