塑性・クリープ分離破面解析法の開発と
弾・塑性・クリープ FEA の精度検証への応用

秋田大学大学院　理工学研究科　物質科学専攻　材料理工学コース
教授　大口　健一
（平成 29 年度 一般研究開発助成 AF-2017017）

キーワード：塑性，クリープ，疲労，破面解析，フラクタル次元

1．研究の目的と背景

低サイクル疲労寿命の予測には，非弾性ひずみ振幅 $(\Delta\varepsilon)^{\mathrm{in}}$ を用いた Coffin-Manson 型の寿命予測式が広く用いられている．一方，はんだのような粘塑性材料では，寿命予測のパラメータに非弾性ひずみ振幅 $(\Delta\varepsilon)^{\mathrm{in}}$ をそのまま用いるのではなく，それを塑性成分 $(\Delta\varepsilon)^{\mathrm{p}}$ とクリープ成分 $(\Delta\varepsilon)^{\mathrm{c}}$ に分けて用いる寿命予測式を使用した方が予測精度は高いことが知られている．繰返し粘塑性変形による低サイクル疲労の発生が予想される機械部品の設計では，弾・塑性・クリープ FEA を実行することが多い．この場合，非弾性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}$ は塑性成分 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ とクリープ成分 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ に分けて算出されるため，塑性・クリープ分離型の寿命予測式の使用が可能となり，寿命予測精度の向上が期待される．しかし，その精度を保証するには，$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}$ 中の $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ の構成比 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}/\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ が適切であることが必須となる．

弾・塑性・クリープ FEA のある計算ステップ終点での応力 $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}$ は，$\boldsymbol{\sigma}_{i+1}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}:\{\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{e}}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}-(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}})\}$ のように求められる（$\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$：弾性テンソル，$\boldsymbol{\varepsilon}_i^{\mathrm{e}}$：計算ステップ始点での弾性ひずみ，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$：全ひずみ増分，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$：計算ステップで算出された塑性ひずみ増分，クリープひずみ増分）．通常，機械部品の FEA を実行する前には，その解析精度を担保するために引張試験や繰返し負荷試験などの FEA を実行し，そこで得た応力ーひずみ曲線が実験と一致することを確認する．しかし，上記の式からわかるように，ここでの応力の一致は，算出した非弾性ひずみ増分 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ の大きさが妥当であることを示すものであり，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}$ 中の $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ と $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ の構成比が妥当であることを示すものではない．したがって，塑性・クリープ分離型の寿命予測式を用いた高精度の低サイクル疲労寿命予測を可能とするには，弾・塑性・クリープ FEA で算出された $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}$ 中の $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ と $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ の構成比 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}/\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ が妥当であることを確認するための何らかの手段が必要となる．

報告者は，瞬間的負荷とひずみ保持を繰返す階段負荷により，繰返し負荷で生じる非弾性ひずみの発達挙動を塑性ひずみとクリープひずみに分離して解析する方法を提案している [1]．そして，この方法を Sn-3.0Ag-0.5Cu（SAC）はんだの引張・圧縮繰返し負荷による疲労試験での非弾性ひずみ解析に適用している [2), 3)]．その中で，周期とひずみ振幅が同一で引張側と圧縮側のひずみ速度を入れ替えた，Fast-Slow と Slow-Fast の各負荷について塑性・クリープひずみ解析を実施したところ，き裂が開口する引張側において，Fast-Slow では塑性ひずみが蓄積し，Slow-Fast ではクリープひずみが蓄積することが判明した [2]．また，Fast-Slow の破面では塑性変形に由来するストライエーションが，Slow-Fast の破面ではクリープ変形に由来する顕著な凹凸が認められ，この解析結果が妥当であることを確認することができた [3]．これらのことは，疲労破面性状と負荷中に生じた塑性・クリープひずみ量の対応関係を明らかにすれば，負荷で生じた塑性ひずみとクリープひずみの構成比 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}/\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{c}}$ の推定が，破面観察により可能になることを示唆している．そして，これを可能とするには，まず，破面性状を定量化する方法を確立する必要がある．

そこで本研究では，Fast-Slow と Slow-Fast での疲労試験で破断した SAC はんだ試験片の破面性状をフラクタル次元で定量化することを試みた．すなわち，Fast-Slow と Slow-Fast による疲労破面の 3 次元凹凸状態を表すコンター図を複数の条件について作成し，各図のフラクタル次元を求めた．そして，それらの値を比較して破面性状の複雑さを評価すると共に，各破面に対応する塑性・クリープひずみ解析結果とフラクタル次元の相関関係について検討した．

2．実験方法および破面解析方法

2・1　試験片および観察方法

本研究で疲労破面を観察した試験片は，外径 8mm，標点部長さ 18mm の円柱状の試験部をもつ SAC はんだ試験片である [1~3)]．破面を得た疲労試験は，前述の Fast-Slow と Slow-Fast の引張・圧縮繰返し負荷によるものであり，すべて室温で実施した．その負荷条件を表 1 に示す．

表 1 中の t_{t} と t_{c} は，それぞれ，引張りと圧縮に要する時間である．試験番号 1-2，3-4，5-6，7-8 の各ペアは，周期とひずみ振幅が同一で t_{t} と t_{c} を入替えた負荷条件の組合わせとなっている．すなわち，各ペアは，t_{t} が t_{c} よりも短い Fast-Slow と，t_{t} が t_{c} よりも長い Slow-Fast の組合わせとなっている．また，表 1 の N_{f} は，各負荷条件での疲労寿命であり，これらを上述のペアで比較すると，いずれも Slow-Fast の方が短寿命となることがわかる．

疲労破面の観察には，デジタルマイクロスコープ（OLYMPUS DSX-500）を用いた．この顕微鏡が有する 3D フォーカス機能を用いて，破面の凹凸状態を表す 3D 画像とコンター図を作成した．

表１　疲労試験の負荷条件

No.	$\Delta\varepsilon$(%)	t_t / s	t_c / s	N_f
1	±0.25	5	50	3556
2	±0.25	50	5	1620
3	±0.25	10	100	3708
4	±0.25	100	10	1445
5	±1.00	4	40	368
6	±1.00	40	4	96
7	±1.00	4	400	260
8	±1.00	400	4	48

2・2　破面解析方法

図形の複雑さをとらえることができるフラクタル次元[4)]を用いて，金属やコンクリートの破断面の特徴を定量化しようとする研究がこれまでに行われている[5~8)]．これらの研究では，フラクタル次元を求める際に，様々な方法が用いられているが，一般的には，ボックスカウンティング法を用いることが多い．破断面の断面プロファイルのような，曲線のフラクタル次元をボックスカウンティング法で求める際には，曲線を１辺の長さ a の正方形で被覆して，被覆に要した正方形の個数を数える．そして，この被覆と計数を a の値を変えて複数回実施する．その例として，秋田県の輪郭を被覆した結果を図１に示す．図１では，灰色の正方形で輪郭線を被覆している．

曲線の被覆に要した１辺 a の正方形の数を $N(a)$ としたとき，$N(a)$ と a の間に以下の関係が確認できたとする．

$$N(a) = Ca^{-D} \tag{1}$$

ここで C と D は正の定数である．式(1)が成立するとき，D が当該曲線のフラクタル次元に相当する．すなわち，両対数プロットした $N(a)$ と a の関係が直線で表されるとき，その傾きを-1 で除せば，フラクタル次元 D を算出することができる．曲線のフラクタル次元 D は $1 \leqq D < 2$ の値をとり，その値が大きいほど形状が複雑ということになる．

本研究の疲労破面のフラクタル次元解析にも，ボックスカウンティング法を採用した．ただし，破面の断面プロファイルの解析ではなく，破面を曲面として解析した．したがって，解析で得られるフラクタル次元 D は，$2 \leqq D < 3$ の値をとる．このようなフラクタル次元をボックスカウンティング法で算出するには，１辺 a の立方体で曲面を被覆する必要がある．本研究では，図２のように行うボックスカウンティングを，１辺 a の立方体による曲面の被覆とみなした．その具体的な方法は，以下の通りである．

(i)　図 2(a)のような曲面図を作成することが可能な，高さ情報を含む正方形画像を用意する．本研究では，疲労破壊過程前半に生じた破面において，高さ情報を含む 1mm×1mm の領域の写真を撮影した．

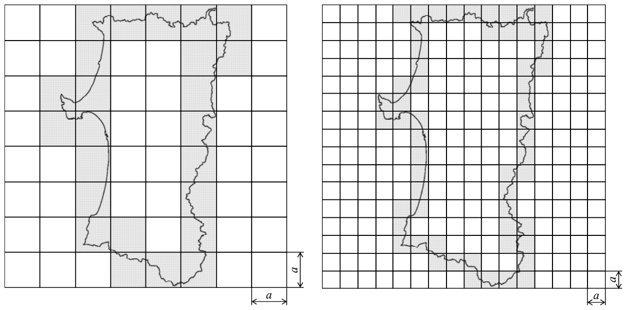
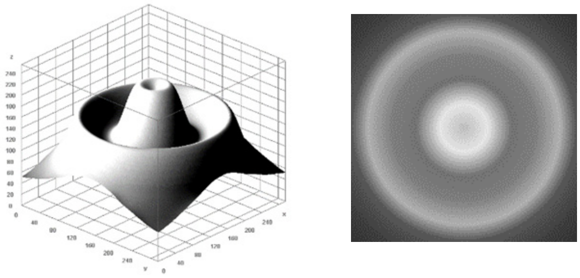
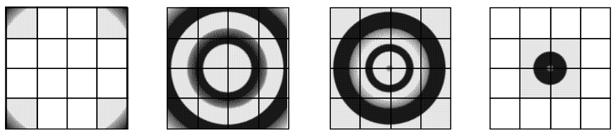


図１　正方形による曲線の被覆例



(a) 解析対象の曲面　　(b) 曲面の高さコンター図



0〜63　64〜127　128〜191　192〜255

(c) 階調範囲毎の２値化によるボックスカウンティング

図２　曲面のボックスカウンティングの例

(ii)　(i)の正方形画像から，図 2(b)のように高さを 256 階調のグレースケールで表したコンター図を作成する．スケール(高さ)ラベルの最小値は 0，最大値は元の正方形画像の１辺の長さ l とする．すなわち，コンター図の１階調を l/256 の高さに設定する．

(iii) １辺の長さ $l/2^n$(n は 1〜8 の整数)の立方体による曲面の被覆を，n の値を順に変えて実行するために，n の値に対応する閾値を用いて，(ii)のコンター図を２値化する．図 2(c)に n=2 での処理例を示す．n=2 での階調範囲分けは，図 2 (a) の外枠が立方体を構成しているとみなせば，一辺の長さ l=256 の立方体を高さ方向に４分割したことを意味する．

(iv)　(iii)で用意した２値化像を，階調(高さ)範囲毎に１辺 $a=l/2^n$ の正方形で覆い，黒色部分を含む正方形の数を数える．図 2(c)では，灰色の正方形の数を数えることになる．

(v)　(iv)で階調(高さ)範囲毎に数えた正方形の数を合計して，曲面を覆うのに必要な立方体の数とする．

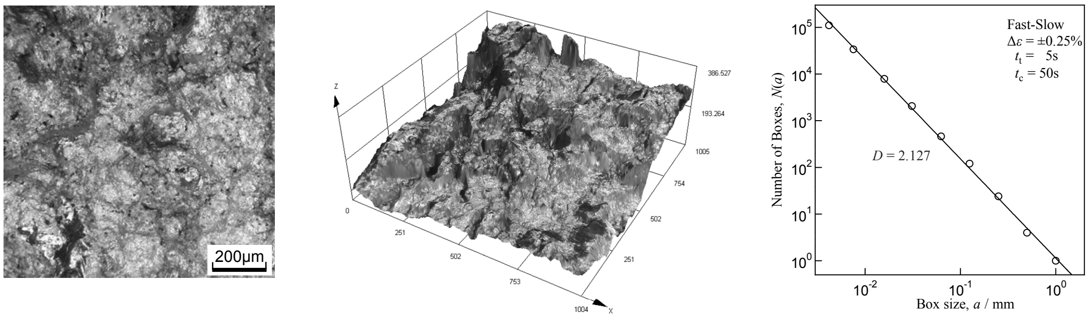
(vi)　n の値を 1〜8 まで順に変えて，(iii)〜(v)の作業を繰返す．

以上の(iii)～(vi)の作業は，画像処理ソフトウェア ImageJ を使用するマクロを作成して実施した．

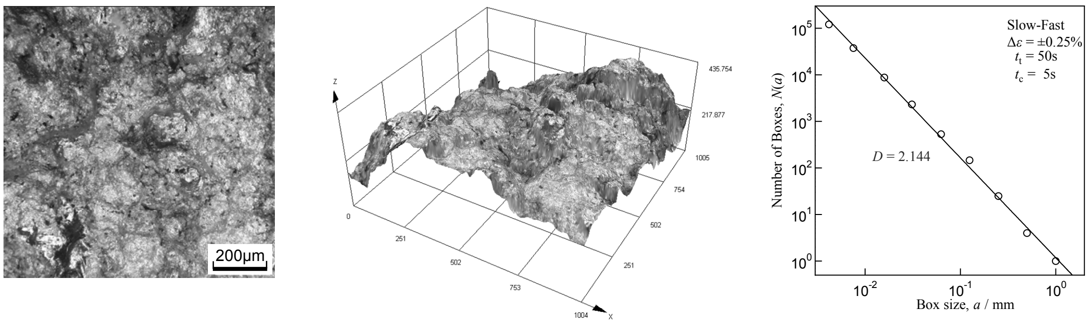
３．実験結果および考察

３・１　疲労破面のフラクタル次元

図3～6は，疲労破面の形態とフラクタル次元を，周期とひずみ振幅が等しいFast-SlowとSlow-Fastの試験条件ペアで比較した結果である．図3～6は，それぞれ，試験番号1-2，3-4，5-6，7-8のペアでの比較である．また，試験番号毎に示す3つの図は，左から破面写真，破面の鳥瞰図，およびボックスカウンティングによるフラクタル次元算出用のグラフである．すべてのフラクタル次元算出用グラフにおいて，図中のフラクタル次元 D は，$2 \leqq D < 3$ の値となっている．このことから，前章で述べたボックス

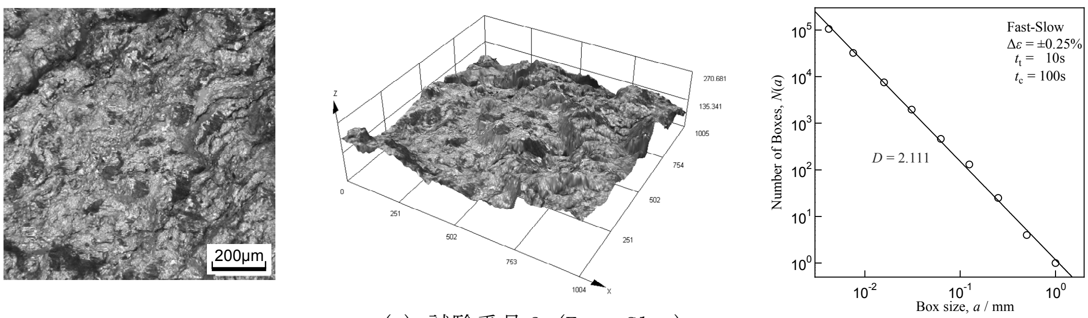


(a) 試験番号1 (Fast-Slow)

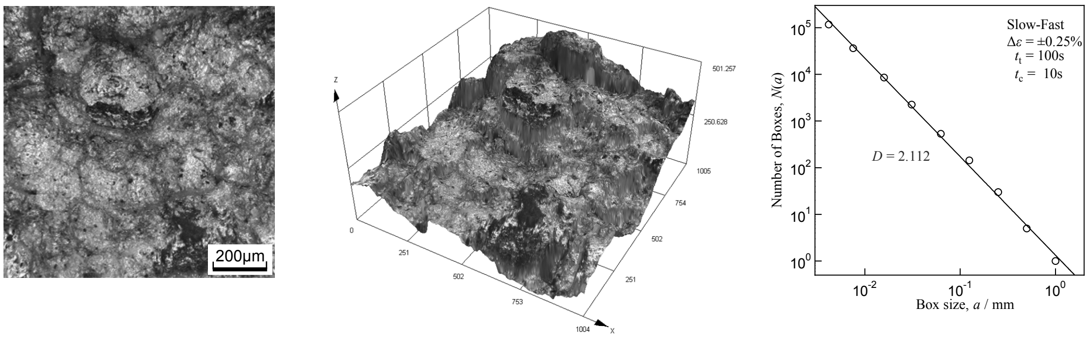


(b) 試験番号2 (Slow-Fast)

図3　Fast-Slow と Slow-Fast での破面形態とフラクタル次元 (試験番号1と2の比較)



(a) 試験番号3 (Fast-Slow)

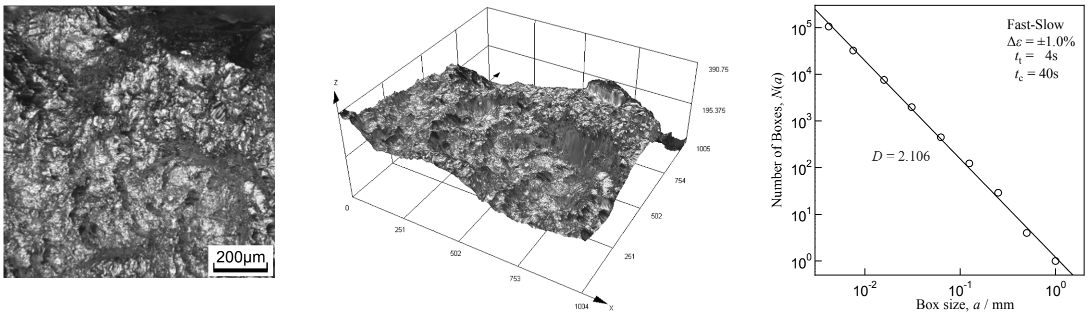


(b) 試験番号4 (Slow-Fast)

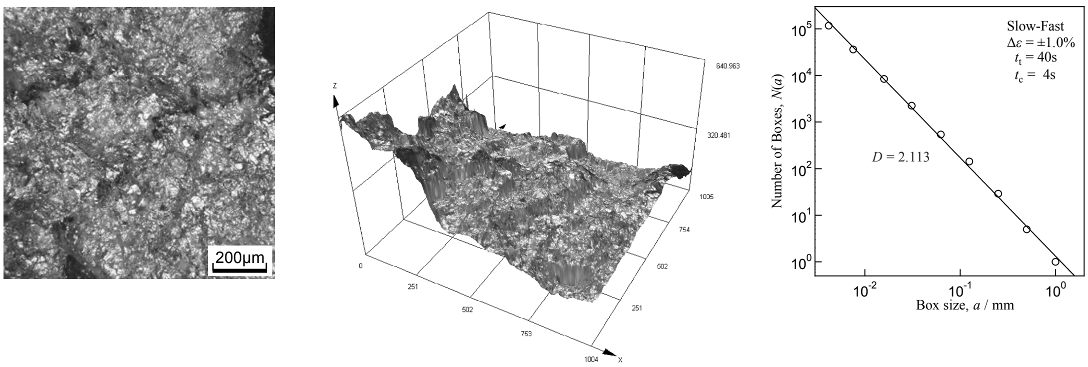
図4　Fast-Slow と Slow-Fast での破面形態とフラクタル次元 (試験番号3と4の比較)

カウンティング法により，疲労破面が曲面としてフラクタル次元解析されたことがわかる．

図3～6の各図に示したフラクタル次元Dを，Fast-SlowとSlow－Fastで比較した結果を図7に示す．図7中の点線は，試験条件ペア毎の比較を容易にするための補助線である．図7において，図3～6中に示したDの値と共に各試験条件ペアでDを比較すると，大きな差は認められない．しかし，いずれのペアでも，Slow-Fastの方が高い値となっており，Fast-SlowよりもSlow-Fastの破面の方が複雑な形状を有していることになる．

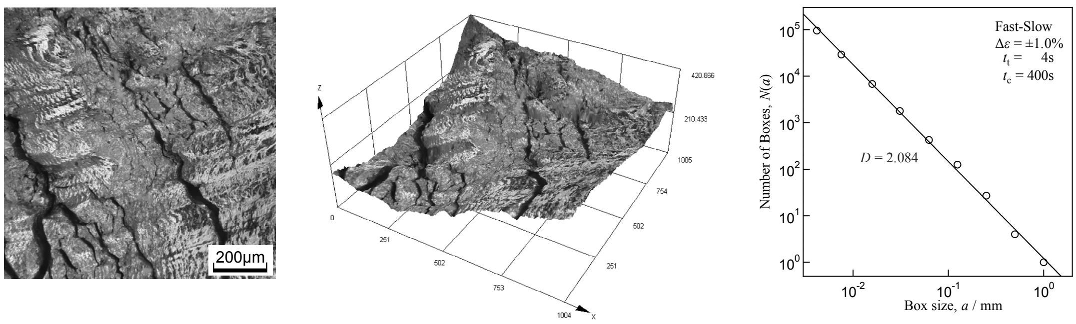


(a) 試験番号5 (Fast-Slow)

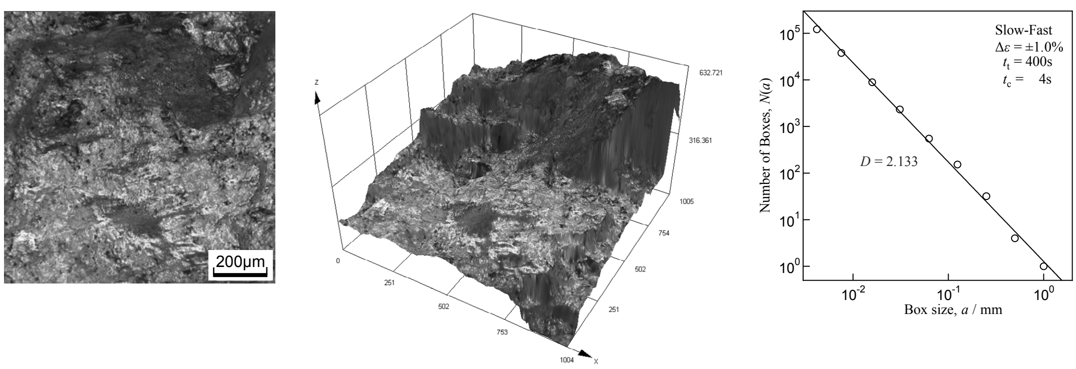


(b) 試験番号6 (Slow-Fast)

図5　Fast-SlowとSlow-Fastでの破面形態とフラクタル次元（試験番号5と6の比較）



(a) 試験番号7 (Fast-Slow)



(b) 試験番号8 (Slow-Fast)

図6　Fast-SlowとSlow-Fastでの破面形態とフラクタル次元（試験番号7と8の比較）

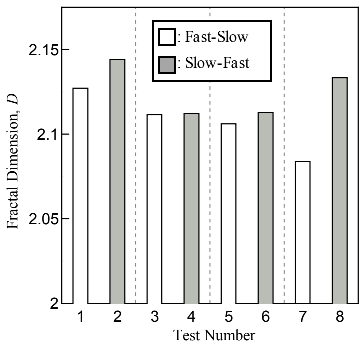
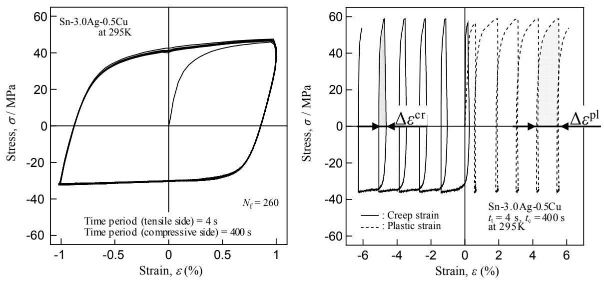
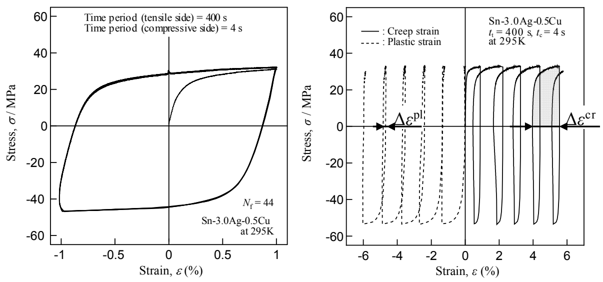


図 7　Fast-Slow と Slow-Fast での
フラクタル次元の比較



(a) 応力-ひずみ関係　　　(b) ひずみ解析結果

図 8　試験条件 7（Fast-Slow）での
応力-ひずみ関係とひずみ解析結果



(a) 応力-ひずみ関係　　　(b) ひずみ解析結果

図 9　試験条件 8（Slow-Fast）での
応力-ひずみ関係とひずみ解析結果

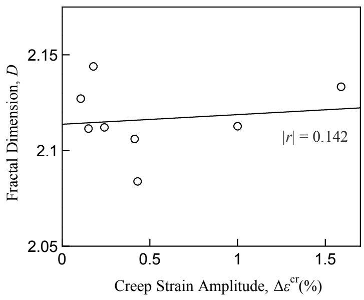


図 10　フラクタル次元とクリープひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^{cr}$ の関係

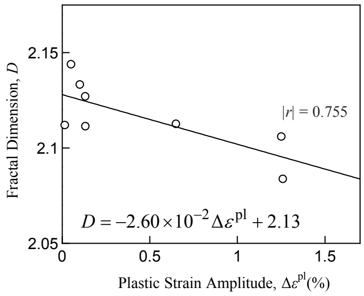


図 11　フラクタル次元と塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^{pl}$ の関係

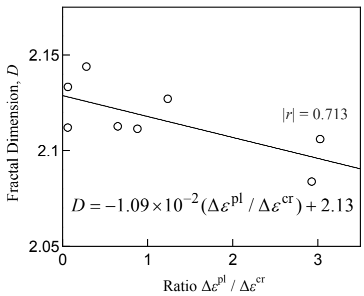


図 12　フラクタル次元と $\Delta\varepsilon^{pl} / \Delta\varepsilon^{cr}$ の関係

3・2　塑性・クリープひずみとフラクタル次元の関係

報告者は，緒言で述べたように，Fast-Slow と Slow-Fast による繰返し負荷で SAC はんだに生じる塑性ひずみとクリープひずみの発達挙動を，階段負荷試験を実施して解析している．その解析例として，表 1 の試験番号 7 と 8 の負荷における解析結果を，図 8 と 9 にそれぞれ示す．各図で，(a)は解析対象とした 5 サイクル分の応力-ひずみ曲線，(b)はその解析結果である．図 8(a)から，Fast-Slow による応力-ひずみ曲線は，引張側の応力レベルが圧縮側よりも高い非対称のループ形状となることがわかる．一方，図 8(a)の引張側と圧縮側の速度を入れ替えた，Slow-Fast 条件による図 9(a)の応力-ひずみ曲線は，圧縮側の応力レベルが引張側よりも高いループ形状となっている．このように，ヒステリシスループ形状が上下を入れ替えたようになる Fast-Slow と Slow-Fast の条件では，塑性ひずみとクリープひずみの発達挙動も反対の傾向を示す．すなわち，図 8(b) と図 9(b)からわかるように，Fast-Slow（図 8(b)）での塑性ひずみとクリープひずみの発達方向は，それぞれ，引張側と圧縮側であるのに対し，Slow-Fast（図 9(b)）ではその逆となっている．

表 1 で示した通り，Fast-Slow と Slow-Fast による SAC はんだの疲労寿命は，ひずみ振幅と周期が同一でも Slow-Fast の方が短寿命となる．SAC はんだの変形が示すひずみ速度依存性は，非弾性ひずみ中のクリープひずみ成分に支配されるため，疲労寿命が示すひずみ速度依存性もクリープひずみに関連している可能性がある．このことから報告者は，疲労き裂が開口する引張側で生じるクリープひずみと疲労寿命の相関関係を調査した [2), 3)]．そこでは，5 サイクル目の引張側で生じたクリープひずみに相当する，図 8(b)と図 9(b)で $\Delta\varepsilon^{cr}$ と表すクリープひずみ振幅と

疲労寿命の関係を調査した．その結果，$\Delta\varepsilon^{cr}$は疲労寿命と高い相関を示し，SAC はんだの疲労寿命評価用パラメータとして，極めて有用であることが判明した．

本研究では，$\Delta\varepsilon^{cr}$は，疲労破面のフラクタル次元とも相関を示す可能性があると考え，図 7 に示したすべてのフラクタル次元と，それぞれに対応するクリープひずみ $\Delta\varepsilon^{cr}$の関係を調査した．その結果を図 10 に示す．図 10 中に示すように，フラクタル次元 D と $\Delta\varepsilon^{cr}$の相関係数の大きさ$|r|$は 0.142 と小さく，ほとんど相関はみられない．したがって，Slow-Fast のフラクタル次元が Fast-Slow よりも高い値を示すことに対して，クリープ変形が寄与する度合いは小さいと考えられる．そこで次に，このことに対する塑性変形の影響について調査することとした．

図 11 は，5 サイクル目の引張側で生じた塑性ひずみである塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^{pl}$（図 8(b)，図 9(b)参照）とフラクタル次元 D の関係である．図 11 に示すように，これらの間には$|r|$=0.755 と強い相関がみられ，その関係は次式で表される．

$$D = -2.60 \times 10^{-2} \Delta\varepsilon^{\mathrm{pl}} + 2.13 \tag{2}$$

図 11 と式(2)より，塑性ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^{pl}$が増加するとフラクタル次元 D が減少することがわかる．また，図 12 は D と $\Delta\varepsilon^{pl}/\Delta\varepsilon^{cr}$の比の関係であるが，図 10 でクリープひずみ振幅 $\Delta\varepsilon^{cr}$とフラクタル次元 D の間にほとんど相関がみられなかったこともあり，$\Delta\varepsilon^{pl}/\Delta\varepsilon^{cr}$ と D の間にも$|r|$=0.713 での相関がみられる．そして，その関係は次式で表される．

$$D = -1.09 \times 10^{-2} (\Delta\varepsilon^{\mathrm{pl}} / \Delta\varepsilon^{\mathrm{cr}}) + 2.13 \tag{3}$$

図 12 と式(3)より，$\Delta\varepsilon^{pl}/\Delta\varepsilon^{cr}$も $\Delta\varepsilon^{pl}$と同様に，その値が増加すると D が減少することがわかる．

式(2)と(3)は，疲労き裂の進展に対して塑性変形が関与する度合いが増すと，破面性状の複雑さが小さくなることを示唆している．さらに，式(3)は，破面のフラクタル次元を評価することにより，繰返し負荷で生じる非弾性ひずみ中の塑性ひずみとクリープひずみの構成比が把握できる可能性も示唆している．すなわち，緒言で述べた疲労破面観察による弾・塑性・クリープ FEA の精度の検証が可能になることを示唆している．ただし，式(2)と(3)は，破面の観察領域の大きさによっては，成立しないことも起こり得る．したがって，今後は，破面観察領域の大きさとフラクタル次元との関連についても調査していく必要がある．

4．結　言

本研究では，Fast-Slow と Slow-Fast の引張・圧縮繰返し負荷による SAC はんだ疲労破面のフラクタル次元を負荷条件毎に求め，各条件に対応する塑性・クリープひずみ解析結果とフラクタル次元の相関関係について検討した．その結果，以下の結論を得た．

(1) 破面を 1 辺 a の立方体で曲面を被覆するボックスカウンティング法により，疲労破面を曲面として扱うフラクタル次元解析を実行することができた．

(2) ひずみ振幅と周期が等しい Fast-Slow と Slow-Fast による SAC はんだの疲労破面では，Slow-Fast による破面の方が高いフラクタル次元 D をもつ．ただし，その差は小さい．

(3) Fast-Slow と Slow-Fast での引張・圧縮繰返し負荷による SAC はんだの疲労破面のフラクタル次元 D は，負荷 5 サイクル目の引張側で生じるクリープひずみ $\Delta\varepsilon^{cr}$とは，ほとんど相関を示さない．これに対し，同じ 5 サイクル目引張側で生じる塑性ひずみ $\Delta\varepsilon^{pl}$および $\Delta\varepsilon^{pl}$と $\Delta\varepsilon^{cr}$の比 $\Delta\varepsilon^{pl}/\Delta\varepsilon^{cr}$とは，強い相関を示し，これらの値が増加すると D の値は減少する．

(4) 結論(3)のフラクタル次元 D と $\Delta\varepsilon^{pl}/\Delta\varepsilon^{cr}$の関係式は，疲労破面観察による弾・塑性・クリープ FEA の精度検証に活用できる可能性がある．しかし，上記関係式は疲労破面の観察領域によって成立しないことも考えられるため，観察領域の大きさとフラクタル次元との関連を今後詳しく調査する必要がある．

謝　辞

本研究は，公益財団法人天田財団の平成 29 年度一般研究開発助成の援助を受けて実施しました．ここに深く感謝の意を表します．また，本研究の遂行に際しては，秋田県産業技術センター研究員の黒沢憲吾氏，秋田大学大学院理工学研究科助教の福地孝平氏，秋田大学卒業生の古舘一徳氏にご尽力いただきました．心より感謝申し上げます．

参考文献

1) Ohguchi, K. and Sasaki, K.：ASME Journal of Electronic Packaging, 132, (2010), 041003.
2) Ohguchi, K. and Sasaki, K.：ASME Journal of Electronic Packaging, 132, (2010), 041010.
3) Ohguchi, K., Sasaki, K., Yuze, Y. and Fukuchi, K.：Mechanical Engineering Journal, 6-5 (2019), Paper No.19-00137.
4) 石村貞夫・石村園子：フラクタル数学, (1990), 238, 東京図書
5) 池庄司敏孝・塩屋義：日本機械学会論文集(A 編), 64-623 (1998), 1984-1990.
6) 酒井孝・酒井達雄・上野明：日本機械学会論文集(A 編), 66-652 (2000), 2183-2190.
7) Tanaka, M., Kimura, Y., Kayama, A., Kato, R. and Taguchi, J.： ISIJ International, 44-7 (2004), 1250-1257.
8) 佐藤あゆみ・山田寛次・石山智：日本建築学会構造系論文集, 79-698 (2014), 437-444.