

体積弾性・偏差剛塑性 FEM システムの構築

電気通信大学 電気通信学部 機械制御工学科

助教授 横内康人

(平成5年度研究開発助成 AF-93033)

1. 研究の目的と背景

有限要素法は塑性加工の分野においても有力な道具として位置づけられている。有限要素法には剛塑性理論に基づくものと、より精密な弾塑性理論にもとづくものと二つの流れがあり、用途によって使い分けられている。本研究は剛塑性有限要素法を弾塑性有限要素法にいくらか近付ける試みとして、剛塑性のときその取り扱いが問題となる体積成分すなわち静水圧応力と体積ひずみの間に弾性法則を導入し、偏差成分には従来の剛塑性有限要素法と同様レヴィーミゼスの流動則を適用するという新たな定式化を示し、実用的な有限要素解析システムをきちんとした形に作りあげることが目的とする。

焦点となっている体積成分の扱いの困難さは、次のような理由による。金属の塑性理論では体積変化が起こらないとして構成式を記述している。ところが通常の有限要素法は可容速度（または変位）場すなわち幾何学的に不合理のない速度場を多項式で近似することが出発点になっている。弾塑性の有限要素法であれば弾性によるいくらかの圧縮性を容認するから問題にならないが、剛塑性有限要素法では体積不変の条件を自動的に満足する速度場の近似関数が見いだせない。このような事情から体積成分の取扱いが困難になる。

剛塑性有限要素法における体積成分の扱いはこれまでに次のような手法が確立されている。

- 1) ラグランジュ未定乗数により体積変化を拘束する方法^{1), 2), 3)}
- 2) ペナルティ法により体積変化を拘束する方法⁴⁾
- 3) 圧縮性材料に対する塑性論に基づく方法⁵⁾
- 4) 流れ関数を用いる方法⁶⁾

本手法は、体積成分に弾性構成式を導入するが剛塑性理論に近いから、ターゲットは鍛造や押出しのようなバルクな加工である。また本システムでは平面ひずみ問題と軸対称問題を扱う。

2. 体積弾性・偏差剛塑性有限要素法の定式化

仮想仕事の原理はつぎのように表される。

$$\int_V (\dot{\epsilon}^*)^T \sigma dV - \int_{S_F} (v^*)^T F dS = 0 \quad (1)$$

ここで、 v^* と $\dot{\epsilon}^*$ はそれぞれ運動学的に可容な仮想速度場および仮想ひずみ速度場である。また F および σ は表面力ベクトルと応力である。軸対称問題の場合、円筒座標によってこれらの成分を表示すると

$$v = \begin{Bmatrix} v_r \\ v_z \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_z \end{Bmatrix}$$

および

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz}/\sqrt{2} \end{Bmatrix}, \quad \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sqrt{2} \tau_{rz} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

有限要素の離散化表示を行うと、仮想速度の任意性より

$$\int_V B^T \sigma dV - \int_{S_F} N^T F dS = 0 \quad (3)$$

ここに B はひずみ速度と節点速度を結ぶマトリックス、 N は形状関数マトリックスである。応力 σ は偏差成分 σ' と等方成分 $\sigma_m C$ からなるとして

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma' + \sigma_m C \\ \sigma_m &= \frac{1}{3} C^T \sigma \end{aligned} \quad (4)$$

ここで C は定数ベクトルであって、軸対称の場合

$$C^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0]$$

である。したがって式(4)は

$$\int_V B^T (\sigma' + \sigma_m C) dV - \int_{S_F} N^T F dS = 0 \quad (5)$$

塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}'$ と偏差応力の間に流れ則を適用し

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}' = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} G \dot{\epsilon} = \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} G B u \\ G &= I_4 - \frac{1}{3} C C^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし $\bar{\sigma}$ および $\bar{\epsilon}$ は相当応力および相当塑性ひずみ速度、 u は要素に関連する節点速度ベクトルである。相当塑性ひずみ速度は次式で与えられる ($G^T G = G$ に注意)。

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}')^T \dot{\epsilon}'} = \sqrt{\frac{2}{3} u^T B^T G B u} \quad (7)$$

材料の硬化特性として次式を用いる。

$$\bar{\sigma} = Y \bar{\epsilon}^m \dot{\bar{\epsilon}}^m \quad (8)$$

ここで

$$\bar{\epsilon} = \int \dot{\bar{\epsilon}} dt$$

である。また粘性がない場合は以下においても一貫して $m=0$ と置きさえすればよい。式(6)の流れ則に式(8)を代入し

$$\sigma' = \frac{2}{3} Y \bar{\epsilon}^n \dot{\epsilon}^{m-1} G B u \quad (9)$$

また等方応力（静水圧）は弾性圧縮性の条件から

$$\dot{\sigma}_m = K \dot{\epsilon}_{vol} = K C^T \dot{\epsilon} = K C^T B u \quad (10)$$

ただし K は体積弾性率 (bulk modulus) である。これをヤング係数とポアソン比で表すと次のようである。

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (11)$$

時刻 $t + \Delta t$ における等方応力は、一般化台形則の時間積分公式により

$$(\sigma_m)_{t+\Delta t} = (\sigma_m)_t + \Delta \sigma_m = (\sigma_m)_t + \Delta t [(1-\beta)(\dot{\sigma}_m)_t + \beta(\dot{\sigma}_m)_{t+\Delta t}] \quad (12)$$

時刻 $t + \Delta t$ において仮想仕事の原理を適用することとし、式(12)を式(10)と組みあわせた結果および式(9)を式(5)に代入すると

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{2}{3} Y \bar{\epsilon}^n \dot{\epsilon}^{m-1} B^T G B + \beta \Delta t K B^T C C^T B \right) dV u \\ &= \int_{S_F} N^T F dS \\ & - \int_V [(\sigma_m)_t + (1-\beta) \Delta t K (\dot{\sigma}_m)_t] B^T C dV \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、時刻 $t + \Delta t$ において考えているから、式(13)の中で右辺に現れた $(\sigma_m)_t$ と $(\dot{\sigma}_m)_t$ を除くすべて変数が $t + \Delta t$ におけるものである。なお、左辺の $\dot{\epsilon}$ は式(7)により（時刻 $t + \Delta t$ の）節点速度ベクトル u を含んでいることに注意しなければならない。

後に示す数値例では $\beta = 1$ としており、この場合式(13)は

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{2}{3} Y \bar{\epsilon}^n \dot{\epsilon}^{m-1} B^T G B + \Delta t K B^T C C^T B \right) dV u \\ &= \int_{S_F} N^T F dS - \int_V (\sigma_m)_t B^T C dV \end{aligned} \quad (13')$$

以上が体積弾性・偏差剛塑性有限要素法の基本的な定式化である。これらの定式化とすでに確立されている他の手法との定式化の上での比較、および数値例を通じての比較は本研究に先行する論文⁷⁾で報告した。具体的に4節点要素一個あたり一個のラグランジェ未定数を導入する方法の場合、要素の剛性方程式は、節点速度とラグランジェ定数を未知数とする連立方程式の形で

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{2}{3} Y \bar{\epsilon}^n \dot{\epsilon}^{m-1} B^T B u + \lambda B^T C \right) dV \\ &= \int_{S_F} N^T F dS \\ \text{および} & \int_V C^T B dV u = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、ペナルティ法の剛性方程式は、 ζ をペナルティ数（大きな数）として

$$\begin{aligned} & \int_V \left(\frac{2}{3} Y \bar{\epsilon}^n \dot{\epsilon}^{m-1} B^T B u + \zeta B^T C C^T B u \right) dV \\ &= \int_{S_F} N^T F dS \end{aligned} \quad (15)$$

と導かれる。

その論文の数値例によれば、体積弾性・偏差剛塑性有限要素法は通常の剛塑性有限要素法と同程度の近似解を与えてるものと理解された。以下は既報⁷⁾に述べた事項である。

本手法と既存のラグランジェ未定乗数法に基づく剛塑性有限要素法と比べると

1) 本手法には、未定乗数の分だけ未知数が少なくてすむという利点がある。

ただしこの利点はペナルティ法も持ち合わせている。一方ペナルティ法と比較すると

1) 剛性方程式の形はきわめて類似しており、本定式化には等方応力の累積値（に由来する等価節点力）の項が余分についているのみである。

2) ペナルティ法には経験を要するペナルティ数の選択という煩わしさがあるのに対し、本手法には物理的に意味の明白な体積弾性係数を用意すればよいというわかりやすさがある。

なお利点ばかりでなく、本手法には偏差成分と等方成分に分離するという余分な操作（ G を乗じる）が必要になることは通常の剛塑性有限要素法に比べて不利な点である。

本研究では、理論的な側面で次の二点を明らかにし、数値例により実証した。

1) 式(13)には熱ひずみの影響を容易に組み入れることができる。すなわち熱ひずみは体積成分であるから、線膨張係数 α 、温度変化率 \dot{T} に対し、熱による体積膨張率

$$3\alpha \dot{T}$$

を体積ひずみの初期ひずみ速度として扱いさえすればよい。具体的には式(10)を

$$\dot{\sigma}_m = K (\dot{\epsilon}_{vol} - \dot{\epsilon}_{vol}^{thermal}) = K (C^T B u - 3\alpha \dot{T}) \quad (10')$$

と変更するのみである^{8), 9)}。

2) 定式化の上で、ペナルティ法ときわめて類似の形をとり、唯一の大きな違いが本手法の式には等方応力の累積値に由来する項が余分に付いている点であった。この項の存在は、なんらかの要因で数値解に乱れが入った場合にも等方応力あるいは体積ひずみに関する限り自己修正機能をもつ。

以上変形解析の理論面を述べたが、作成したシステムでは温度場解析も包含している。まず温度場解析より熱ひずみや硬化特性の温度依存を変形解析に取り入れ、また塑性変形による発熱を温度場解析に反映させる。すなわち二つの解析を交互に行うという方法で連成問題を扱った。温度場

解析もガラーキン法に基づく有限要素法を適用し、定式化は文献10)に示した通りである。また大きな変形の段階では、初期に整然と分割された要素の形がゆがみ、精度的に好ましくない事態になる。その改善策として、広く採用されているZienkiewiczらの考案した誤差評価規準¹¹⁾の手法を導入し、リメッシュを行うことができる。ただしリメッシュは自動化されていない。

エンジニアリング・ワークステーションHP-735の上で稼働する二次元および軸対称モデルのメッシュジェネレータを作成した。モデルの形状が比較的簡単な場合に限られるが、対話的に視覚で確認しながらデータを作成することができるようになった。開発環境はMotif 1.2およびX11R5のプロトコルを用いた。また同じ開発環境で解析結果をグラフィカルに表示する簡単なポストプロセッサを作成した。ポストプロセッサは変形図および応力等の等高線を描くことが可能である。

3. 研究成果

前述の定式化にしたがって軸対称及び平面ひずみ4節点四角形要素による有限要素解析システムを作成した。剛性マトリックスの体積積分には、2 x 2点ガウスの数値積分公式を用いているが、体積ひずみエネルギーに由来する剛性マトリックスに対しては次数を一つ落としたいわゆる選択低減積分とした。以下にこのソルバーによって解析した数値例を示す。

3.1 熱ひずみの影響調査のための数値例

例題はきわめて基本的な問題で、リング状の円盤の掘え込みを扱った。一つの時間ステップで、温度場解析と変形解析を交互に行っている。被加工材は一樣な高温の初期状態から出発して低温の工具や雰囲気と接しつつ塑性変形を起こし、塑性仕事の90%、摩擦仕事の100%が熱に変換されると仮定した。

一對の平らな剛体工具で内外径比2のリングを圧下率50%まで熱間圧縮するものとし、対称条件から1/2領域のみを解析する(図1参照)。熱ひずみ/熱応力を考慮する上でもっとも影響の大きいパラメータである線膨張

係数 α がどのように寄与するかを調べるため、これをパラメトリックに変え表1に示す三つの値を用いて解析した。現実には α が温度に依存すると思われるが、ひとつの解析では温度によらず一定とした。また以下では、表1に示したとおり、それぞれのケースを $\alpha 0$ 、 $\alpha 14$ 、 $\alpha 28$ の場合と呼びパラメータの大きさを区別する。ここで、 $\alpha=0$ は熱ひずみを考慮しないことに対応し、 $\alpha=14 \times 10^{-6}$ はハンドブック等を参照して定めた現実的な値である。

式(8)に現れる硬化特性式のパラメータ Y や指数 n 及び m の値は、1015 スチールを取り扱った文献¹²⁾を参考にして定め、流動応力をMPa単位で次のように与えている。

$$\begin{aligned} 1100^\circ\text{Cで、} & \quad \bar{\sigma} = 82 \varepsilon^{-0.06} \dot{\varepsilon}^{0.14} \\ 1200^\circ\text{Cで、} & \quad \bar{\sigma} = 73 \varepsilon^{-0.05} \dot{\varepsilon}^{0.22} \\ 1300^\circ\text{Cで、} & \quad \bar{\sigma} = 41 \varepsilon^{-0.045} \dot{\varepsilon}^{0.16} \end{aligned}$$

諸元その他の条件は表2のとおりである。

以下に示す応力やひずみ等の分布図はすべて最終状態すなわち圧下率50% (時刻2.5秒) のものであり、リングの

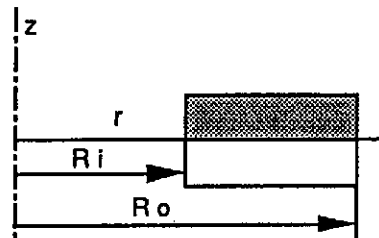


図1 リング圧縮モデル

表1 線膨張係数

| ケース (略称) | α / K^{-1} |
|-------------|--------------------------|
| $\alpha 0$ | 0 |
| $\alpha 14$ | 14×10^{-6} |
| $\alpha 28$ | 28×10^{-6} |

表2 リング圧縮モデルのパラメータ

| | | | |
|--------------------------|------------|---|--------|
| 材料 | 1015 steel | 摩擦係数 | 0.2 |
| 外径 / m | 0.06 | 密度 / kg m^{-3} | 7830 |
| 内径 / m | 0.03 | 比熱 / $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ | 460.52 |
| リング高さ / m | 0.01 | 熱伝導係数 / $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ | 53.49 |
| ダイス温度 / K | 773 | 熱伝達係数 / $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ | |
| 室温 / K | 293 | リング-ダイス間 | 4500 |
| リング初期温度 / K | 1573 | リング-空気間 | 25 |
| ダイス速度 / ms^{-1} | 0.002 | 時間増分 / s | 0.1 |
| 体積弾性係数 / GPa | 60 | | |

断面は図1の網かけ部分に対応している。熱ひずみを扱っているため、基本になる温度場を最初に示す。図2は3つの線膨張係数を用いた解析それぞれの結果である。体積ひずみは塑性仕事に関係がないから、あらかじめ予想されたように3つのケースで温度分布に差はない。温度はいたるところで降下し、初期温度1573K (1300 °C) から平均値およそ1200K 強まで下がっている。α 28 の場合、これに対応する体積ひずみの熱膨張成分はおよそ-3%である。

次に体積ひずみ速度の分布を図3に示す。この図に限り(a), (b), (c)各図のパラメータ値が異なるので注意されたい。体積ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_v$ の大きさはα に比例的であって、線膨張係数α の影響が大きい。定性的には、熱ひずみを考慮しない場合 (a) 図の結果に熱収縮が重ね合わされたと考えられるから合理的な結果である。

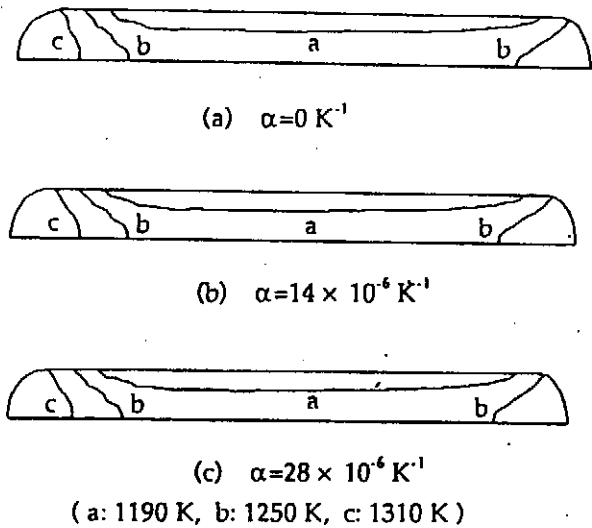


図2 圧下率50%時の温度分布 (初期温度は1573K 一様)

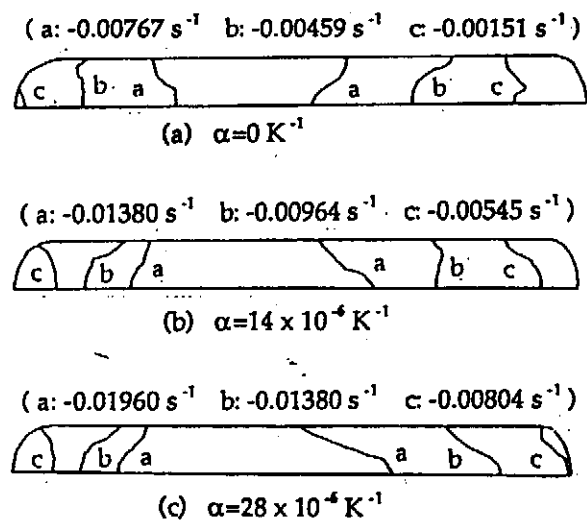


図3 体積ひずみ速度の分布 (圧下率50%)

図4は等方応力 σ_m の等高線図である。3つのα値に対応する等方応力 σ_m の分布形はほぼ同じである。しかし、注意深く観察すると σ_m はαといくらか関係があり、αが大きいほど、静水圧 ($=-\sigma_m$) が大きい領域は逆に小さい。また、α 28 と α 14 の場合、リングの内縁 (図の左側) に小さな静水圧 (パラメータ値c) の領域が現れている。

なお、相当塑性ひずみ速度と相当応力の分布は線膨張係数にほとんど依存しない結果であった。相当応力は温度に強く依存するが、これまで見てきたように温度場がαの影響をほとんど受けなかったから、その結果としてαもαの影響を受けないはずであり、合理的な結果である。

次に荷重及び変形について考察する。表3に荷重～変位 (圧下率) のデータを示す。線膨張係数αが小さい方がやや剛になっている。これは圧下率のうち熱による収縮の分は荷重なしで自然に縮むこと及び工具と接触している受圧面の面積も熱ひずみで減少するから定性的には合理的な結果である。定量的に、圧下率50%のところでα 0 と α 28 の場合の荷重差が4.5%程度生じている。

表4に圧下率30%, 40%及び50%時リングの内径と外径及びそれらの変化率を示す。ここで $(d_i)_{min}$ は最小内径 (リングの内縁と上下対称軸の交点の直径), $(d_o)_{max}$ は最大外径 (リングの外縁と上下対称軸の交点の直径) であり、 ψ_i は最小内径減少率, ψ_o は最大外径増加率である。

表3 圧縮荷重の比較

| 圧下率 (%) | 圧縮荷重 / kN | | |
|---------|-----------|------|------|
| | α 0 | α 14 | α 28 |
| 30 | 361 | 355 | 351 |
| 40 | 526 | 514 | 507 |
| 50 | 818 | 795 | 783 |

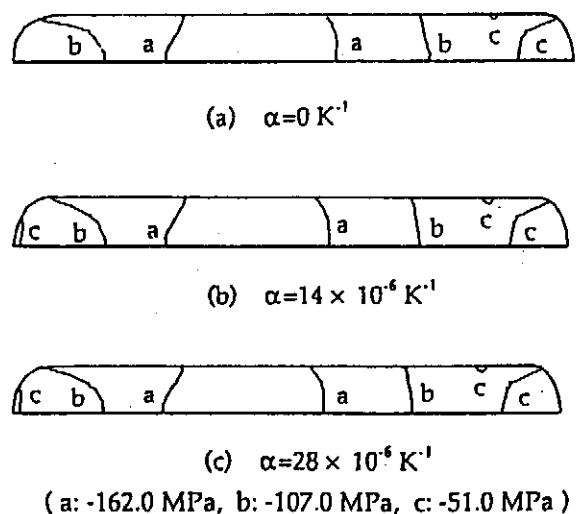


図4 等方応力の分布 (圧下率50%)

表 4 最小内径減少率および最大外径増加率の比較

| 圧下率 (%) | Ψ_i / % | | | Ψ_o / % | | |
|---------|--------------|-------------|-------------|--------------|-------------|-------------|
| | $\alpha 0$ | $\alpha 14$ | $\alpha 28$ | $\alpha 0$ | $\alpha 14$ | $\alpha 28$ |
| 30 | 17.4 | 17.4 | 17.1 | 12.5 | 12.2 | 11.8 |
| 40 | 28.7 | 28.7 | 28.3 | 18.2 | 17.7 | 17.2 |
| 50 | 47.2 | 46.7 | 45.9 | 25.5 | 24.8 | 24.1 |

すなわち

$$\psi_i = \frac{D_i - (d_i)_{\min}}{D_i} \quad (16)$$

$$\psi_o = \frac{(d_o)_{\max} - D_o}{D_o} \quad (17)$$

ここで D_i 及び D_o はリングの初期内径及び外径である。この表により、 ψ_i と ψ_o は α と負の相関があることがわかる。これはリングの圧縮に伴い温度が下がるため、 α が大きい方が熱によるリングの縮み量も大きく、強制的に内外に押し出されていく量が少ないからである。円周方向の熱ひずみも負であるから、 α による差異は最小内径減少率よりも最大外径増加率のほうが大きい。

本数値例を通じて得られた事項を要約すると、熱ひずみを考慮しない場合と比べ、

- 1) 応力やひずみの分布では、体積ひずみ（速度）が大きく異なること
- 2) その他の応力／ひずみ成分の分布はそれほどの影響を受けないこと
- 3) 変形量ばかりでなく荷重もある程度の影響を受けること。差異が生じる度合いは、平均的な温度変化から見積った熱による体積ひずみ（たかだかその2倍以内）程度であること

これらはきわめて常識的な結果で、直感的に類推可能であるかも知れないが、一度は数値的にきちんと確認しておくべき事項である。

3. 2 静水圧に対する自己修正機能の確認のための数値例

本研究の定式化とペナルティ法のそれとの唯一の大きな違いが本手法の式には等方応力の累積値に由来する項が余分に付いている点であった。なんらかの要因で解に乱れが入った場合にも、等方応力あるいは体積ひずみに関する限り、この項が自己修正機能をもつと期待される。この推論を実証するために、単純な円柱ブロックの据込み問題の解析において、ある変形段階で収束誤差の許容値を急激に甘くすることで人工的な乱れを起し、次のステップ以降では再び通常の許容値に戻すという数値実験を行った。

解析モデルは松原・工藤の実験的研究¹³⁾に合わせ、耐食性アルミニウム（JIS A5056）とし、硬化特性は

$\bar{\sigma} = 100 + 360 \bar{\epsilon}^{0.22}$ / MPa とした。また体積弾性係数は $K = 70$ GPa とした。直径と高さが等しい円柱を、圧下率増分 0.5% で計 20% までの圧縮過程（ただし圧下率 3% の解を求めるときに上述の外乱をを与えた）を解析した。

比較のため、ペナルティ法による解析（ペナルティ数は $\zeta = \Delta t K$ とした）も行った。

図5は最終の20%圧縮時における工具との接触面上の圧力分布である。本方法の解（V-FEMとして表示）がペナルティ法の解（P-FEMとして表示）より滑らかな曲線になり、いくらか実験値に近い。ペナルティ法の解は過去に受けた外乱の影響がまだ残っているように見受けられる。また、図6は圧下率の進行に対して、円柱の全体積の正確

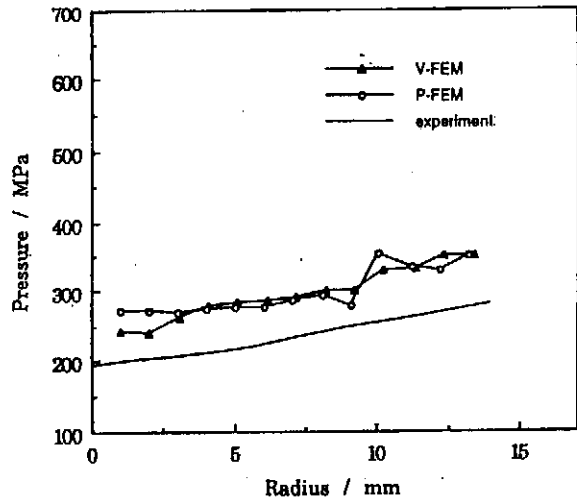


図5 工具との接触面上の面圧分布（実験値は文献13）による）

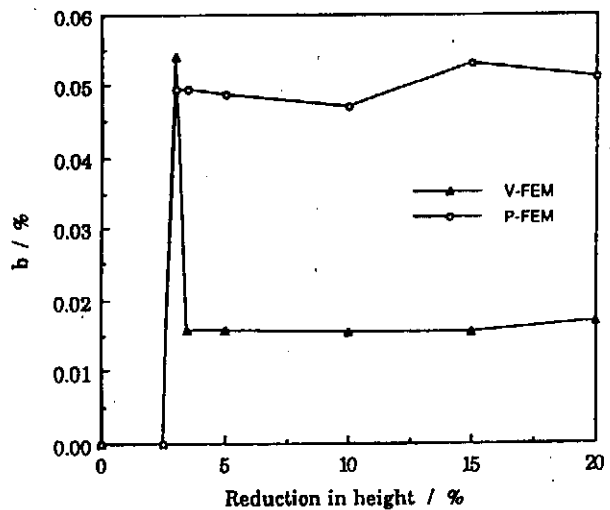


図6 円柱の体積変動の比較（圧下率3%のときに、1ステップに限り収束条件を緩めて人工的な外乱を導入）

な値 (途中で外乱を入れない解) からのずれ率 b

$$b = \frac{(Volume)_0 - (Volume)_{with\ disturbance}}{(Volume)_0} \times 100\%$$

をプロットしたものである。ここに $(Volume)_0$ は人工的な外乱を導入せずに得られた (精度を維持した通常の) 解の円柱の体積である。ペナルティ法が一度体積変化を起こしたならば回復不能であるのに対し、本方法は相当部分を回復しており、ある程度自己修正機能が働いたことを示している。

4. 結 び

本研究では、実在の金属が完全に非圧縮性ではなく、弾性圧縮性を持つ (ポアソン比が0.5でないかぎり) ことに着目し、偏差成分には通常の剛塑性有限要素法を、体積ひずみと等方応力の間弾性の性質を導入した新しい定式化による有限要素解析システムを作成した。メッシュ創成や事後処理 (プリ/ポスト・プロセッシング) の部分がまだ十分でなく、改善の余地が多い状態である。作成したシステムによる例題解析では、本手法は熱や温度に対し、材料定数の温度依存性のみで処理するのではなく、通常の弾塑性解析の有限要素法と同様に熱ひずみをきちんとしかも簡単に導入し得ること、および本手法がペナルティ法に基づく剛塑性有限要素法に類似していても、ペナルティ法には存在しない一項目が体積ひずみ等の乱れにに対し自己修正機能をもつことを例証した。これらの点をラグランジェ定数法やペナルティ法に基づく方法より優位な特徴として明示することができた。

5. 謝 辞

最後に本研究を遂行することができたのは、天田金属加工機械技術振興財団の研究助成 AF-93033のご援助による

ところが大きであったことを付記し、同財団に心から感謝の意を表します。また、郭永明博士 (現在鹿児島大学工学部助手) には実質的に共同研究者の役割を果たしていただいたことを付記し、感謝の意を表します。

6. 参考文献

- 1) Lung, M. and Mahrenholtz, O. : Trans. CSME, 2-1 (1973), 31.
- 2) Lee, C. H. and Kobayashi, S. : Trans. ASME, J. Eng. Ind., 95-3(1973), 865.
- 3) Oh, S. I. and Kobayashi, S. : Mtal Forming Plasticity, IUTAM Symposium, Tutzing, Germany, (1978), 273.
- 4) 秦謹一・石川博将・山本一英 : 塑性と加工, 15-167 (1974), 1003.
- 5) 森謙一郎・島進・小坂田宏造 : 機論 A, 45-396 (1979), 955.
- 6) Zienkiewicz, O. C., and Godbole, P. N. : Int. J. Numer. Meth. Eng., 8-1(1974), 3.
- 7) 郭永明・横内康人・鈴木秀雄 : 塑性と加工, 35-403 (1994), 965.
- 8) 郭永明・横内康人・鈴木秀雄 : 第45回塑加連論文集, (1994), 687.
- 9) 郭永明・横内康人・鈴木秀雄 : 塑性と加工, 34-421 (1996), 231.
- 10) 郭永明・横内康人・鈴木秀雄 : 塑性と加工, 34-388 (1993), 487.
- 11) Zienkiewicz, O. C., and Zhu, J. Z. : Int. J. Numer. Meth. Eng., 24-2(1987), 337.
- 12) Doremus, E., Oudin, J., Bricout, J.P. and Ravalard, Y. : J. Mater. Process. Technol., 26-3(1991), 257.
- 13) 松原茂夫・工藤英明 : 塑性と加工, 32-366 (1991), 874.