

複合材料に対する塑性加工シミュレーション数理モデルの開発

筑波大学 構造工学系

助教授 河井昌道

(平成5年度研究開発助成 AF-93026)

1. 研究の目的と背景

高分子系および金属系の複合材料、ならびに新しい超耐熱合金の応用によって、従来の材料では実現できない優れた性能の向上が得られる。しかし、一方で、変形挙動と破壊挙動の巨視的な異方性が著しく増大する。したがって、これらの材料の応用にあたっては、異方性主軸の適切な配置が極めて重要な設計要件となる。また、これまでに整備されてきた応力解析に基づく設計手法あるいは加工解析手法と適合させるためには、これらの初期異方性材料が示す非弾性挙動を精密に記述するための非弾性構成モデルを開発することが不可欠の要件となる。

本研究では、繊維強化複合材料の異方的でしかも非線形な応力-ひずみ挙動を記述するための構成モデルについて、現象論的な観点からの定式化を試みる。まず、一方向強化複合材料を想定し、横等方性(面内等方性)を持つ連続体の非弾性変形挙動を議論する。構成モデルの定式化にあたっては、非可逆熱力学に基づく定式化手法を応用する。初期異方性(横等方性)は4階の異方テンソルにより一般的な形で導入し、ひずみ硬化には非線形移動硬化を仮定する。この研究では、さらに、移動硬化変数に経験的な表示を仮定することによって非線形等方硬化モデルを導く。最後に、ボロン繊維強化アルミニウム合金の非主軸引張変形のシミュレーションを行い、開発した数理モデルの妥当性を検証する。

2. 研究方法

<第1段階>数理構成モデルの開発:非可逆熱力学に基づく定式化手法と4階の異方テンソルを用いて横等方性(初期異方性)数理構成モデルを開発する。すなわち、

- (1) 自由エネルギー関数と散逸エネルギー関数を4階の異方テンソルを用いて定義する。
- (2) 上記の2種のスカラ関数から、一組の連立微分方程式系を導く。
- (3) 必要に応じて、構成モデルの単純化を行う。
- (4) 具体的な計算ができるように、座標系を設定して、成分表示を求める。

<第2段階>解析用プログラムの開発:非線形連立微分方程式を時間積分するためのプログラムを開発する。

(1) Runge-Kutta-Gill法による時間積分プログラムを開発する。

(2) プログラムをデバッグする。

(3) 凶形出力用プログラムを開発し、主プログラムと結合する。

<第3段階>材料定数の決定と検証のための応用解析:定式化した横等方性モデルの妥当性を検証する。

(1) ボロン繊維強化アルミニウム合金の非弾性変形に関して、開発した数理モデルの材料定数を決定する。

(2) 材料同定に用いていない実験結果の解析を行い、数理モデルの記述精度を評価する。

3. 研究成果

繊維強化複合材料の巨視的な応力-ひずみ関係にバウシinger効果の現れることが、生成系複合材料、アルミナ繊維強化アルミニウムや炭化珪素(粒子、ウイスカ)強化アルミニウムについて報告されている。

本研究では、これらの事実を踏まえて、まず一方向繊維強化複合材料の横等方・非線形移動硬化モデルを定式化し、続いてこれを非線形等方硬化モデルへ特殊化する。

3.1 内部変数と自由エネルギー関数

非弾性変形によって生じたある瞬間における内部状態が2階の内部変数テンソル ξ (偏差テンソル)によって記述されるものと仮定する。仮定した内部変数に関連する熱力学的力、すなわち内部応力を規定するため、自由エネルギー関数を定義する。ここでは、弾性と非弾性の非連続性を仮定して、全自由エネルギーが

$$\Psi = \Psi_e(\epsilon^e) + \Psi_p(\xi) \quad (1)$$

と表現できるものとする。さらに、非弾性に関連する右辺第二項を

$$\rho^* \Psi_p(\xi) = \frac{1}{3} H \xi \cdot \xi \quad (2)$$

と表現する。ここで、 ρ^* 、 H はそれぞれ、密度と材料定数を表す。

内部変数 ξ に関連する熱力学的力 p は、自由エネルギー関数

の内部変数に関する勾配によって定義されるから、

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* \frac{\partial \Psi_p}{\partial \xi} = \frac{2}{3} \mathbf{H} \xi \quad (3)$$

となる。

3.2 内部変数の発展式と散逸エネルギー関数

仮定した内部変数の発展式を規定するため、散逸エネルギー関数を定義する。ここでは、4階の横等方性テンソルAと有効応力 \mathbf{s}^*

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \mathbf{p} \quad (4)$$

(偏差応力 \mathbf{s} と移動硬化変数 \mathbf{p} の差)を用いて、

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{s}^*, \mathbf{p}, \xi) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}^*} + \frac{L}{2H} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p}} - \frac{HL}{2} \sqrt{\frac{2}{3} \xi \cdot \mathbf{A} \xi} \quad (5)$$

と表される関数を仮定し、散逸エネルギー関数を

$$\Omega^* = \frac{K}{m+1} W^{m+1} \quad (6)$$

と定義する。このとき、非弾性ひずみ速度は、次式により与えられる。

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{s}} = \frac{3}{2} \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{u}}{U} \quad (7)$$

ここで、

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{K} \mathbf{U}^m = \mathbf{K} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}^*}^m \quad (8)$$

$$\frac{2}{3} U^2 = \mathbf{s}^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{s}^* = 2\mu \text{tr}[\mathbf{s}^{*2}] + 4\beta \text{tr}[\mathbf{s}^* \mathbf{H} \mathbf{s}^*] - (3\alpha + 4\beta) [\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{s}^*)]^2 \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{s}^* = 2\mu \mathbf{s}^* + \alpha \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{s}^*) \mathbf{H} + 2\beta [\mathbf{s}^* \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{s}^*] - (3\alpha + 4\beta) \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{s}^*) \mathbf{H} \quad (10)$$

とおく、 K , m は材料定数であり、上式に含まれる \mathbf{I} は2階の恒等テンソルを表す。

内部変数の発展式は、

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} \frac{L}{H} \mathbf{A} \mathbf{p} \dot{\mathbf{p}} \quad (11)$$

と表現される。ここで、

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{p} = 2\mu \mathbf{p} + \alpha \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p}) \mathbf{H} + 2\beta (\mathbf{p} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{p}) - (3\alpha + 4\beta) \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p}) \mathbf{H} \quad (12)$$

である。したがって、内部応力の時間変化率は、

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{2}{3} \mathbf{H} \dot{\xi} = \frac{2}{3} \mathbf{H} \dot{\epsilon}^p - \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{p} \dot{\mathbf{p}} \quad (13)$$

によって与えられる。

3.3 動的回復と静的回復を含む横等方・非線形移動硬化モデルの一般化

散逸関数を、

$$\Omega^* = \frac{K}{m+1} W^{m+1} + \frac{M}{\ell+1} V^{\ell+1} \quad (14)$$

と仮定する。ここで、不変量 V は

$$\frac{2}{3} V^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \mathbf{p} = 2\mu \text{tr}(\mathbf{p}^2) + 4\beta \text{tr}(\mathbf{p} \mathbf{H} \mathbf{p}) - (3\alpha + 4\beta) [\text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{p})]^2 \quad (15)$$

で定義される。

このとき、ひずみ速度式は式(7)と一致するが、内部変数の発展式は、

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \Omega^*}{\partial \mathbf{p}} = \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} \frac{L}{H} \mathbf{A} \mathbf{p} \dot{\mathbf{p}} - \frac{3}{2} M V^{\ell} \frac{\mathbf{v}}{V} \quad (16)$$

となる。

したがって、内部応力の時間変化率は、

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{2}{3} \mathbf{H} \dot{\xi} = \frac{2}{3} \mathbf{H} \dot{\epsilon}^p - \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{p} \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{H} M V^{\ell} \frac{\mathbf{v}}{V} \quad (17)$$

によって与えられる

3.4 マルチ硬化変数を伴う横等方・非線形移動硬化モデルの一般化

応力-ひずみ関係の非線形性の記述精度を高めるため、移動硬化変数を非線形性の異なる複数の移動硬化変数の和によって記述することも行われる。この考え方を用いれば、上述の発展式を

$$\dot{\xi}_i = \dot{\epsilon}^p - \frac{3}{2} \frac{L_i}{H_i} \mathbf{A} \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{p}} - \frac{3}{2} M_i V_i^{\ell_i-1} \mathbf{A} \mathbf{p}_i \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{2}{3} H_i \dot{\xi}_i = \frac{2}{3} H_i \dot{\epsilon}^p - L_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{p}} - H_i M_i V_i^{\ell_i-1} \mathbf{A} \mathbf{p}_i \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \left(\frac{2}{3} H_i \dot{\epsilon}^p - L_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i \dot{\mathbf{p}} - H_i M_i V_i^{\ell_i-1} \mathbf{A} \mathbf{p}_i \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\sum_i H_i \right) \dot{\epsilon}^p - \mathbf{A} \left(\sum_i L_i \mathbf{p}_i \right) \dot{\mathbf{p}} - \mathbf{A} \left(\sum_i H_i M_i V_i^{\ell_i-1} \mathbf{p}_i \right) \end{aligned} \quad (20)$$

のように拡張することができる。実用的には、指標 i は $1 \leq i \leq 3$ の範囲で取られることが多い。

3.5 横等方・非線形等方硬化モデル

いま、

$$\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \rho \mathbf{n} \quad (21)$$

を仮定する。ここで、 ρ は等方硬化を記述する内部変数であり、 \mathbf{n} は偏差応力の方向を表す単位テンソル

$$\mathbf{n} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{J(\mathbf{s})} \quad (22)$$

である。このとき、内部応力 \mathbf{p} は

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} H \xi = \sqrt{\frac{2}{3}} H \rho \mathbf{n} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{r} \mathbf{m} \quad (23)$$

となる。また、有効応力は、

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s} - \mathbf{p} = \mathbf{s} - \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{r} \mathbf{m} = \left(1 - \frac{\mathbf{r}}{J(\mathbf{s})}\right) \mathbf{s} \quad (24)$$

と表現できる。

これらの関数を前述の移動硬化モデルの表現に代入すると、非弾性ひずみ速度は

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\mathbf{An}}{\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{An}} \quad (25)$$

とかける。

一方、式(13)から、

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\mathbf{r}} \mathbf{m} = \dot{p} \left[H \frac{\mathbf{n}}{U} - L \mathbf{A} \mathbf{p} \right] = \dot{p} \left[H \frac{\mathbf{n}}{U} - L \mathbf{v} \right] \quad (26)$$

となる。したがって、

$$\dot{\mathbf{r}} = L \mathbf{n} \cdot \mathbf{An} \left[\frac{Q}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}}} - \mathbf{r} \right] \dot{p} \quad (27)$$

が導かれる。ここで $Q = H/L$ であり、また

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{An} = 2\mu + 4\beta \text{tr}(\mathbf{nHn}) - (3\alpha + 4\beta) \{ \text{tr}(\mathbf{Hn}) \}^2 \quad (28)$$

と表現できる。

いま、式(27)において、

$$L_n = L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}) \quad (29)$$

$$Q_n = \frac{Q}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}}} \quad (30)$$

とおけば、式(27)は

$$\dot{\mathbf{r}} = L_n [Q_n - \mathbf{r}] \dot{p} \quad (31)$$

と表現できる。これを積分して、

$$\mathbf{r} = Q_n (1 - e^{-L_n p}) \quad (32)$$

が得られる。したがって、 Q_n は \mathbf{r} の飽和値を与える。

3.6 動的回復と静的回復を含む非線形等方硬化モデル

式(27)で与えられる横等方・等方硬化モデルに静的回復を導入した表現は、式(17)に基づいて、

$$\dot{\mathbf{r}} = [H\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}} - L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{An})\mathbf{r}] \dot{p} - HM\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}}^{n+1} |\mathbf{r}|^n \text{sgn}(\mathbf{r}) \quad (33)$$

のように与えられる。

3.7 マルチ硬化変数を伴う非線形等方硬化モデル

式(20)で与えられる横等方・移動硬化モデルに基づいて、

$$\dot{\mathbf{r}} = \left[\left(\sum_i H_i \right) \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}) \left(\sum_i L_i \tau_i \right) \right] \dot{p} - \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{An}}^{n+1} \left\{ \sum_i H_i M_i |\tau_i|^n \text{sgn}(\tau_i) \right\} \quad (34)$$

を導くこともできる。

3.8 シミュレーション

図1に、式(25)および式(31)を用いて計算した一方方向ボロン繊維強化アルミニウムの引張変形挙動を示す。実験結果は省略してあるが両者はよく一致している。この計

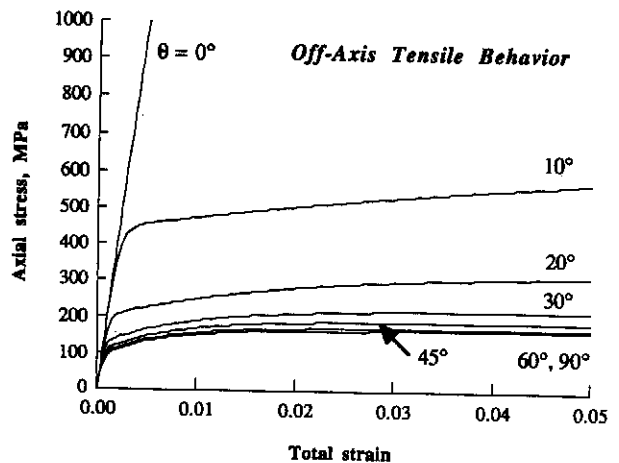


図1 一方方向強化ボロン/アルミニウム複合材の非主軸引張挙動に関するシミュレーション

算結果は等方硬化の場合であるが、移動硬化の場合も全く同じ結果が得られる。マルチ硬化変数を仮定することで非線形性の精度を一層高めることができる。したがって、開発した連続体材料モデルはこの種の異方性複合材料の変形加工解析に十分な精度で適用可能である。なお、用いた材料定数は以下のようである。: $m = 4.0$, $K = 6.31 \times 10^{-10} \text{ MPa}^{-m} \text{ h}^{-1}$, $Q = 93.6 \text{ MPa}$, $L = 100.0$, $\alpha = 0.999$, $\beta = -0.0545$, $\mu = 0.99975$.

4. 結 び

本研究では、繊維強化複合材料における異方的な非弾性挙動を巨視的および現象論的立場から記述するための構成モデルについて一形式を提案した。まず、基礎的な研究段階として、一方向繊維強化複合材料を想定し、初期異方性には横等方性を仮定した。また、ひずみ硬化が移動硬化によって記述されるものと仮定し、移動硬化変数の発展式が Armstrong - Frederick の非線形移動硬化則によって規定される場合の表現を導いた。定式化には非可逆熱力学に基づく内部状態変数理論の手法を応用した。

定式化した横等方・異方硬化非弾性構成モデルは、初期等方性材料に対する非線形移動硬化モデルを横等方性材料の場合へ拡張したものに相当する。すなわち、提案した横等方・非弾性構成モデルにおいて、4階の横等方性テンソルを4階の恒等テンソルに置換した場合、等方性材料に対する構成モデルが導かれる。著者が多結晶金属材料の異方クリープ挙動の定式化に用いた内部変数の特別な経験的記述方法を仮定した場合、定式化した横等方・非線形移動硬化構成モデルから横等方・非線形等方硬化構成モデルを導くことができる。本非線形モデルは、一方向繊維強化複合材料(ボロン繊維/アルミニウム合金複合材料)の非主軸非弾性挙動を精度よく記述することができる。

5. 謝 辞

天田金属加工機械技術振興財団から受けた研究助成に対して感謝の意を表す。

6. 参考文献

- (1) 河井昌道、繊維強化複合材料の非弾性構成モデルの定式化、日本機械学会材料力学部門講演会講演論文集 No. 930 - 71、1993、11月、大阪、p. 317.
- (2) 河井昌道、繊維強化複合材料の非弾性構成モデルの定式化、日本機械学会論文集 A 編、60巻578号(1994 - 10)、p. 2334.
- (3) M.Kawai, Constitutive Model for Non - Linear Behavior of Unidirectionally Fiber - Reinforced Metal Matrix Composites, Proceedings of the Second Asia - Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and Its Applications (AEPA'94), 1994, Beijing, p. 95.
- (4) M. Kawai, Constitutive Model for Coupled Inelasticity and Damage, The Third JSME / ASME Joint International Conference on Nuclear Engineering (ICONE - 3), 1995, Kyoto, p. 261.
- (5) M. Kawai, Damage Coupled Constitutive Model for Metal Matrix Composites, Proceedings of the Fifth International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, 1995, July, Osaka, (in press).
- (6) M. Kawai, Inelastic and Damage Constitutive Model for Unidirectionally Fiber - Reinforced Composites, ASME Symposium on Micromechanics and Constitutive Modeling of Composite Materials, 1995, July, Los Angeles, (in Press).