

剛塑性有限要素法をもとにした残留応力評価手法の開発

岡山大学 工学部 機械工学科

助教授 長岐 滋

(平成3年度研究開発助成 AF-91008)

1. 緒言

剛塑性有限要素解析は弾塑性有限要素法に比べれば繰返しステップ数が少なく、大変形も比較的容易に計算可能であるとされ、塑性加工過程の変形解析などに広く用いられるようになった。しかしこの方法では材料を剛塑性体とみなすことから本質的に弾性ひずみを求めることができず、したがって塑性加工においても問題となるスプリングバックや残留応力などの解析には利用できないという大きな欠点がある。

もちろん大変形を扱える増分形弾塑性有限要素法を用いれば、これらの過程を解析することは可能であるが、基礎理論が難解であること、プログラムの複雑さ、計算時間が長くなる等の点から、大変形弾塑性有限要素法は現状では手軽に使える状態にはなっていないといえる。そこで従来から何らかの近似的な方法で剛塑性有限要素法において弾性変形を考慮しようとする試みがなされてきた。最近では黄、森、小坂田ら⁽¹⁾、郭、横内、鈴木ら⁽²⁾が幾つかの方法を提案している。

一方、弾性ひずみを変形の各ステップにおいて積分的な意味で構成式に含め、剛塑性有限要素法の利点を残し弾性ひずみの効果を考慮した弾・粘塑性有限要素解析の定式化がEggert & Dawson⁽³⁾によっても提案されている。彼らは弾性ひずみの偏差成分が小さく、静水圧成分が大きな場合について大変形を考慮した定式化を行っている。彼らの定式化は大変形を考慮しているが故、一見複雑な形となっているが、基本的な考え方はシンプルであり、微小変形の解析に適用しても有用な結果が得られると考えられる。そこで本研究では彼らの方法を通常の微小変形の解析に適用することで、剛塑性有限要素法の利点をそのまま継承し、かつ簡易に弾性ひずみや残留応力を求めることができる手法を開発することを試みる^(5, 4, 6)。

2. 構成関係

微小変形弾塑性構成関係として通常用いられる Mises の降伏関数を用いた Prandtl Reuss 形の構成式を考える。すなわち全ひずみ速度は弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ と塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ の和で表わされる。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (1)$$

ここに

$$\dot{\epsilon}' = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (2)$$

$$\text{tr} \dot{\epsilon} = \text{tr} \dot{\epsilon}^e \quad (3)$$

$$\text{tr} \dot{\epsilon}^p = 0 \quad (4)$$

ここで記号 ' はテンソルの偏差部分を表わす。弾性ひずみ速度に関する構成関係は、偏差応力 σ' 、静水圧応力 σ_H についてそれぞれ次式で与えられる。

$$\sigma' = 2\mu \dot{\epsilon}' \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \\ &= K \text{tr} \dot{\epsilon}^e \end{aligned} \quad (6)$$

ここで μ 、 K はそれぞれ縦弾性係数、体積弾性係数である。塑性ひずみ速度は相当応力を $\bar{\sigma}$ 、相当ひずみ速度を $\bar{\epsilon}$ として以下のように与えられる。

$$\sigma' = 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}^p \quad (7)$$

ここに

$$2\bar{\mu} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \quad (8)$$

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr} \dot{\epsilon}^p{}^2} \quad (9)$$

$$\bar{\sigma} = K_0 \bar{\epsilon}^m \quad (10)$$

K_0 : 静的降伏応力

m : ひずみ速度感受性指数

ここで式 (10) はべき乗形のひずみ速度依存性を有する粘塑性体の構成関係である。

3. 近似した構成関係

式 (1) ~ (7) に示される弾塑性構成関係は、当然そのままでは剛塑性有限要素法に利用することはできない。そこで、ここでは弾性ひずみを時間刻み毎に考慮した近似的な構成関係を導出する。

すなわち、時刻 $t - \Delta t$ で弾性ひずみ ϵ^e が既知であるとしよう。すると時 t における弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ は差分近似によって

$$\dot{\epsilon}^e(t) = \frac{1}{\Delta t} \{ \epsilon^e(t) - \epsilon^e(t - \Delta t) \} \dots \dots \quad (11)$$

と与えられる。既知の弾性ひずみ $\epsilon^e(t-\Delta t)$ を $\bar{\epsilon}^e$ と書くことにすれば、式 (7) (5) (2) から偏差ひずみ速度について次の関係が得られる。

$$\dot{\epsilon}' = \dot{\epsilon}^p + \frac{1}{\Delta t} \epsilon^{e'} - \frac{1}{\Delta t} \bar{\epsilon}^{e'} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\bar{\mu}} \sigma' + \frac{1}{2\mu \Delta t} \sigma' - \frac{1}{\Delta t} \bar{\epsilon}^{e'} \\ &= \frac{1}{2\mu^*} \sigma' - \frac{1}{\Delta t} \bar{\epsilon}^{e'} \end{aligned} \quad (13)$$

ここに係数 μ^* は

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\bar{\mu}} + \frac{1}{\mu \Delta t} \quad \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。ここで式 (13) を偏差応力について解けば

$$\sigma' = 2\mu^* \left(\dot{\epsilon}' + \frac{1}{\Delta t} \bar{\epsilon}^{e'} \right) \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。このように近似して得られた偏差応力とひずみについての構成式 (15) は、初期ひずみを考慮した剛塑性体の構成関係と類似の形式であり (係数が通常の剛塑性体とは異なる)、剛塑性有限要素法と同様な解法が適用できる。

また体積変形に関しては、全体積ひずみが弾性成分のみであり、式 (6) (11) から、次の近似関係

$$\begin{aligned} \sigma_H &= \frac{1}{3} \text{tr} \sigma = K (\text{tr} \epsilon^e) \\ &= K (\text{tr} \bar{\epsilon}^e + \Delta t \cdot \text{tr} \dot{\epsilon}^e) \\ &= K (\text{tr} \bar{\epsilon} + \Delta t \cdot \text{tr} \dot{\epsilon}) \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる。

4. 仮想仕事の原理

この節では有限要素定式化を行うため、前節で得られた近似構成関係を仮想仕事の原理に適用する。

物体力を b と書くとき、応力の平衡方程式は

$$\text{div} \sigma + b = 0 \dots\dots\dots (17)$$

と書かれる。変位境界条件を満たす試行関数を δu とするとき、上式の弱形式は次のように与えられる。

$$\int_v (\text{div} \sigma + b) \cdot \delta u \, dv = 0 \dots\dots\dots (18)$$

これを Gauss の発散定理などを用いて変形すれば、仮想仕事の原理

$$\int_v \sigma : \delta \dot{\epsilon} \, dv - \int_v b \cdot \delta \dot{u} \, dv - \int_{s_t} t \cdot \delta \dot{u} \, ds = 0 \quad (19)$$

が得られる。上式の応力を偏差成分、静水圧成分に分解して表わすと

$$\begin{aligned} \int_v \sigma' : \delta \dot{\epsilon}' \, dv + \int_v \frac{1}{3} \text{tr} \sigma \text{tr} (\delta \dot{\epsilon}) \, dv \\ = \int_v b \cdot \delta \dot{u} \, dv + \int_{s_t} t \cdot \delta \dot{u} \, ds \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで近似した構成関係式 (15) (16) を代入すれば次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \int_v 2\mu^* \left(\dot{\epsilon}' + \frac{1}{\Delta t} \bar{\epsilon}^{e'} \right) : \delta \dot{\epsilon}' \, dv + \\ + \int_v K (\text{tr} \bar{\epsilon}^e + \text{tr} \dot{\epsilon}^e \Delta t) \text{tr} (\delta \dot{\epsilon}) \, dv \\ = \int_v b \cdot \delta \dot{u} \, dv + \int_{s_t} t \cdot \delta \dot{u} \, ds \end{aligned} \quad (21)$$

5. 有限要素定式化

前節で得られた仮想仕事の原理 (21) をもとに、有限要素法の定式化を行なう。節点変位速度を $\{\dot{U}\}$ と表わし、変位速度、ひずみ速度などについて以下のような行列表示を用いる。

$$\{\dot{u}\} = [N] \{\dot{U}\} \quad (22)$$

$$\{\delta \dot{u}\} = [N] \{\delta \dot{U}\} \quad (23)$$

$$\{\dot{\epsilon}\} = [B] \{\dot{U}\} \quad (24)$$

$$\text{tr} \dot{\epsilon} = \{\delta\}^T [B] \{\dot{U}\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \{\dot{\epsilon}'\} &= \left([B] - \frac{1}{3} \{\delta\} \{\delta\}^T [B] \right) \{\dot{U}\} \\ &= \left([I] - \frac{1}{3} \{\delta\} \{\delta\}^T \right) [B] \{\dot{U}\} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $[N]$ 、 $[B]$ は通常の形状関数、ひずみ-変位マトリクスであり、 $[I]$ は単位行列をあらわす。また $\{\delta\}^T$ は体積一定の条件を表現するための行列でその成分は $\{111000\}^T$ である。

これらの関係式を式 (21) に代入して整理すると、最終的に次の要素剛性方程式が得られる。

$$([K_1] + [K_2]) \{\dot{U}\} = \{f\} - \{g_1\} - \{g_2\} \dots (27)$$

ここで各マトリクスは各要素について以下のように与えられる。

$$[K_1] = \int_v 2\mu^* [B]^T [B] \, dv \quad (28)$$

$$[K_2] = \int_v \left(K \Delta t - \frac{2}{3} \mu^* \right) [B]^T \{\delta\} \{\delta\}^T [B] \, dv \quad (29)$$

$$\{f\}^T = \int_v \{b\}^T [N] \, dv + \int_{s_t} \{t\}^T [N] \, ds \quad (30)$$

$$\{g_1\}^T = \int_v \frac{2\mu^*}{\Delta t} \{\bar{\epsilon}^e\}^T \left[[I] - \frac{1}{3} \{\delta\} \{\delta\}^T \right] [B] dv \quad (31)$$

$$\{g_2\}^T = \int_v K \{\bar{\epsilon}^e\}^T \{\delta\} \{\delta\}^T [B] dv \quad (32)$$

ここで列ベクトル $\{f\}^T$ は通常の外力項と同一であり、列ベクトル $\{g_1\}^T$ 、 $\{g_2\}^T$ はそれぞれ前の時刻ステップでの偏差弾性ひずみ、体積弾性ひずみに関係する等価節点力項である。要素剛性方程式 (27) を通常の有限要素法と同様に組み立てれば、全体剛性方程式が得られる。この方程式の非線形性は、係数 μ^* が、式 (14) からわかるように $\bar{\mu}$ の関数であり、したがって式 (8) を通して相当塑性ひずみの関数になっていることから生ずる。

6. 解法の手順

要素剛性方程式 (27) は、通常の剛塑性有限要素法の場合と同様、節点変位速度についての非線形な連立方程式であり、解法には工夫が必要である。ここでは以下のような手順によって解くことを試みる。

1. $\bar{\epsilon}^e$ と $\dot{\epsilon}^p$ の初期値を仮定する。

$t = 0$ ならば $\bar{\epsilon}^e = 0$ とする。

$t = 0$ における $\dot{\epsilon}^p$ の初期値を得るためには、通常の剛塑性有限要素法計算を 1 回実行する。

$t \neq 0$ ならば前のステップの値を初期値として用いる。

2. 次の式を用いて μ^* を求める。

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\bar{\mu}} + \frac{1}{\mu \Delta t} = \frac{3\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} + \frac{1}{\mu \Delta t} \quad (33)$$

3. 要素剛性方程式 (27) を組み立てて得られる全体剛性方程式を解き、 \dot{u} 、 $\dot{\epsilon}$ を求める。
4. 式 (15) から偏差応力 σ' を求める。
5. 求めた偏差応力から式 (5) を用いて弾性ひずみ ϵ^e を修正する。
6. $\dot{\epsilon}$ 、 ϵ^e を式 (12) に代入して塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ を求める。
7. 塑性ひずみ速度が収束したかを、相当塑性ひずみ速度に関する次式によって調べる。

$$\frac{\|\dot{\bar{\epsilon}}_n - \dot{\bar{\epsilon}}_{n-1}\|}{\|\dot{\bar{\epsilon}}_{n-1}\|} \rightarrow 0 \dots\dots\dots (34)$$

8. もし収束していなければ、ステップ 2. へもどる。
9. σ 、 ϵ^e 、 $\dot{\epsilon}$ 、 $\dot{\epsilon}^p$ 、 \dot{u} などを出力する。
10. 時間ステップを進め、座標値を更新する。

$$x = x + \Delta x \quad (35)$$

$$t = t + \Delta t \quad (36)$$

11. もし時間ステップが予定回数に達していれば計算終了、そうでなければステップ 1. へ戻る。

7. この手法の特徴

この手法の特徴をまとめると以下ようになる。

1. $\mu^* = \bar{\mu}$ の場合、部分剛性行列 $[K_1]$ は、通常の剛塑性有限要素法における剛性行列 $[K_R]$ に等しい。

$$[K_1] = [K^R] \quad (37)$$

2. $\alpha = K \Delta t - \frac{2}{3} \mu^*$ で、かつ $\alpha \rightarrow \infty$ の場合、部分剛性行列 $[K_2]$ は、ペナルティ法を用いた剛塑性有限要素法におけるペナルティ行列 $[K^\alpha]$ に等しい。

$$[K_2] = [K^\alpha] \quad (38)$$

3. $\Delta t = 1.0$ 、 $\bar{\mu} = 0$ の場合、剛性方程式 (27) は初期ひずみ $\bar{\epsilon}^e$ がある場合の弾性有限要素法の剛性方程式と一致する。

4. $\mu^* = \bar{\mu}$ 、 $\bar{\epsilon}^e = 0$ かつ $\alpha = K \Delta t - \frac{2}{3} \mu^*$ の場合、ペナルティ数が α の剛塑性有限要素法と一致する。

このように、本手法は従来のペナルティ法にもとづく剛塑性有限要素法と密接な関連があり、剛塑性有限要素法プログラムを多少変更することによって、弾性ひずみを考慮することができるようになる。

8. 数値計算例

具体的な数値計算例として平面ひずみ問題の直方体ブロックと内圧を受ける厚肉円筒を取り上げ解析し、開発した計算手法の妥当性について検討する。

8.1 直方体ブロックの平面ひずみ圧縮

まず、本計算手法で簡単な直方体ブロックの平面ひずみ圧縮の例を取り上げる。この場合ブロック内の応力とひずみは均一であり、理論公式もよく知られている。ここでは四角形 8 節点要素を用い $100 \times 50 \text{mm}^2$ の長方形形状を 16 要素に分割し、長手方向の y 軸方向圧縮変位速度として 10mm/s を加えた。

本解法は 1 ステップ毎の計算が 2 回目以降では、前時刻のステップ計算で得られた相当塑性ひずみ速度と弾性ひずみを初期値として用い、引き続き計算を進めることができる。また、初期段階で完全な弾性変形であって、次回以降のステップで降伏点を通る場合には、現時点では塑性変形に移行することができず、弾性変形のまま変形が進行する欠点がある。以降の計算では簡単のためにすべて 1 ステップで計算を終了させた場合の結果である。

Fig. 1 に圧縮方向の応力 σ_y 、圧縮垂直方向の応力 σ_z と与えたひずみの関係を示す。理論値は実線で、対応する

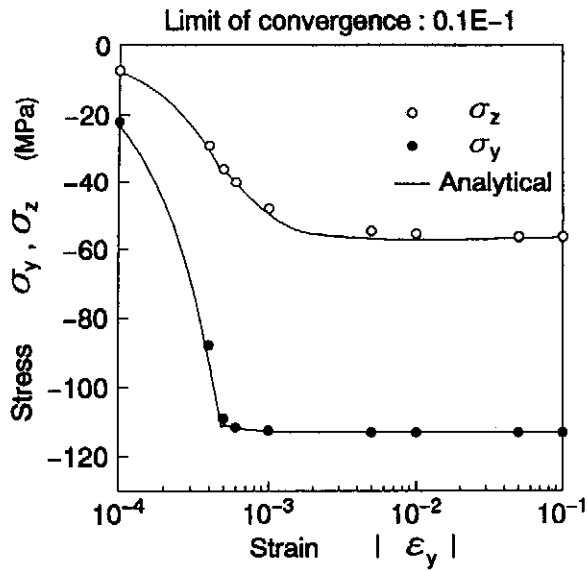


Fig. 1 ブロックの平面ひずみ圧縮時の応力

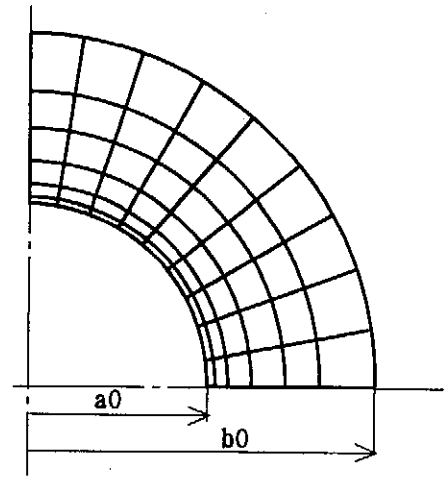


Fig. 3 厚肉円筒の要素分割

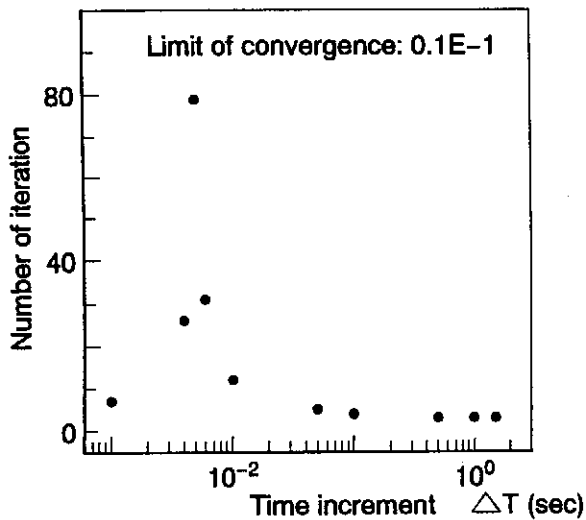


Fig. 2 繰り返し回数と時間増分の関係

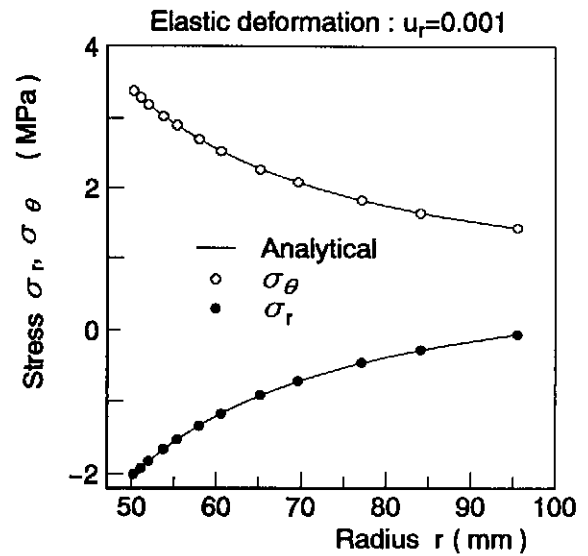


Fig. 4 厚肉円筒の応力分布 (弾性状態)

計算値は丸印であらわしている。図から、理論値⁽⁷⁾と計算値は弾性変形段階、弾塑性変形段階共によく合っていることがわかる。Fig.2は収束までの繰返し回数 N と用いた時間増分 ΔT の関係である。繰返し回数 N は適当な時間増分を選べば少なくなることがわかる。

8.2 内圧を受ける厚肉円筒

内圧を受ける厚肉円筒の場合も理論解が明らかであり、応力とひずみが断面内で分布して計算手法の妥当性を検討することが用意であるため、ここでは平面ひずみ条件下での数値計算をおこなった。

外半径 $b_0 = 100\text{mm}$ 、内半径 $a_0 = 50\text{mm}$ の厚肉円筒の内側に半径方向変位速度 $\dot{u}_r = 1\text{mm/s}$ を与えた。円筒の1/4断面を取り出し、四角形8節点要素を用いて54要

素193節点に要素分割した (Fig. 3)。

Fig. 4は厚肉円筒の全断面が弾性変形の場合について、理論値⁽⁷⁾と円周方向の計算値 σ_θ 及び半径方向の計算値 σ_r の比較を示す。以下の図ではいずれも実線が理論値⁽⁷⁾であり、丸印が計算結果をあらわす。図から理論値と計算値はよく合っていることがわかる。またFig. 5は塑性域が円筒内壁から徐々に外壁へ向かって進んでいく場合の応力分布を示す。図中の c の値は対応する弾塑性境界の半径の理論値である。図からわかるように半径方向の応力 σ_r は理論値とほぼ一致しているが、円周方向の応力 σ_θ は弾性変形領域の側で誤差がやや大きい。これは弾性変形領域で要素がやや大きいことにも関係すると思われる。Fig. 6は全面が塑性変形になった場合の半径方向応力 σ_r と円周

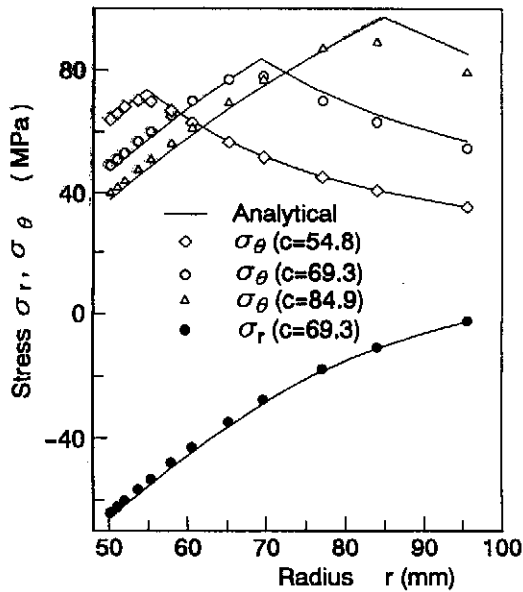


Fig. 5 厚肉円筒の応力分布 (弾塑性状態)

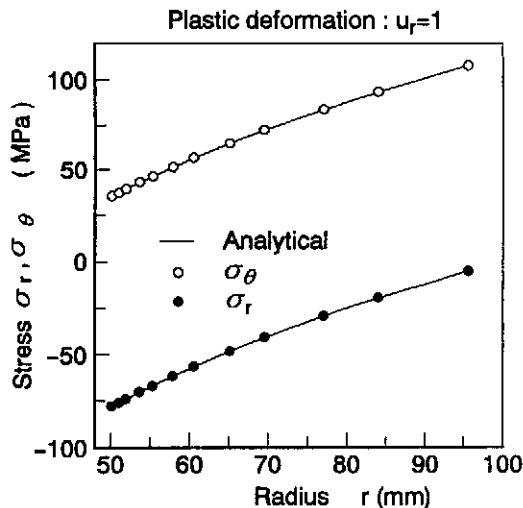


Fig. 6 厚肉円筒の応力分布 (塑性状態)

方向応力 σ_θ の理論値との比較図である。この場合には、理論値と計算値はよく合っていることがわかる。以上のように本手法によれば、領域全体が弾性状態である場合、塑性領域を一部含む場合、全体が塑性状態のいずれの場合についても、応力を求めることが可能である。

9. 結 言

弾性ひずみを積分的な意味で取り入れた近似構成関係を用いて弾性ひずみ成分を考慮した剛塑性有限要素法の定式化を行ない、その計算手法を示した。得られた剛性方程式は、従来の剛塑性有限要素法の剛性方程式を一般化した形になっており、特別な場合として弾性問題の剛性方程式、ペナルティ法を用いた場合の剛塑性問題の剛性方程式を含むことを明らかにした。さらに幾つかの数値解析例を示し本手法の妥当性を検討した。その結果、比較的少ない計算時間で簡易に弾塑性解析が行え、弾性ひずみを求めることが可能であることがわかった。したがって第一次近似として残留応力の推定等に本手法を用いることが可能であるが、より正確な応力解析のためには本手法をさらに除荷領域を含む場合等へ拡張することが必要であると思われる。

なお本研究の数値計算には岡山大学工学部学生田井中純一君、岡山大学大学院学生沈学敏さん (いずれも当時) に協力して頂いた。また財団法人天田金属加工機械技術振興財団からの研究助成をうけて本研究は遂行された。記して謝意を表する。

参考文献

- (1) 黄、森、小坂田、第43回塑性加工連合講演会前刷 (1992), pp. 763 - 766.
- (2) 郭、横内、鈴木、第43回塑性加工連合講演会前刷 (1992), pp. 329 - 332.
- (3) Eggert, G. M. and P.R. Dawson, *Comp. Method Appl. Mech. Engng.*, **70** (1988), pp. 165 - 190.
- (4) 長岐、田井中、*機械学会講演論文集*, No. 935 - 1 (1993) 103-105
- (5) 長岐、*機械学会講演論文集*, No. 930-63 (1993) 601-603
- (6) 沈、長岐、阿部、*機械学会講演論文集*, No. 955-1 (1995) 715-716
- (7) 山田嘉昭、*塑性力学*, (1965) 日刊工業新聞社