

# しわ発生限度図 (WLD) に関する研究

神戸大学 工学部 機械工学科

教授 富田佳宏

(平成2年度研究開発助成 AF-90002)

## 1. 研究の背景

新しく開発された各種高強度板材の成形に適したプレス金型をはじめ素板の形状の決定は、有限要素法などを援用した数値シミュレーション法を用いて行なわれる。しかしながら、製品の価値を左右するしわや面ひずみのような欠陥の発生に対して十分ではなく、その対応が急務とされている。本研究は、各種薄板の成形において発生する応力状態としわ発生との関係をしわ発生限度図 (WLD) によって表すための基礎研究で、加工プロセス中に発生する不安定現象の解析をすることなく、通常の数値シミュレーションによって得られた応力に対する情報から、成形限度図 (FLD) を用いた成形性の評価と同様に、しわや面ひずみの発生の予知を可能にする。

## 2. 研究の目標

本研究では、しわ発生限度図 (WLD) を作成するための基礎研究を行い、それを薄板加工プロセスに導入できる形式で示すことを目的とする。はじめに、各種応力状態での不安定発生の解析シミュレーション法を定式化するために、弾塑性不安定解析ならびに不安定現象の予知と密接な関係を有する異方性体の構成式を示す。次に、しわの発生が広範囲に及ぶ場合について一般的なしわ発生解析法を示し、それを2、3の具体的なしわ発生挙動の解析に適用する。更にWLDは局所的な応力状態からしわ座屈発生を予知することになるので、上記一般論を、比較的、限られた領域における応力状態から、しわの発生限度を求める場合に特殊化しその発生条件を求める。

## 3. 研究成果の概要

### 3.1 構成式

薄板の弾塑性構成式として、弾性ひずみ速度に対してHookeの法則を用いる。塑性ひずみ速度には、しわ発生現象などのように応力速度の方向が急変した場合にも対応できる全ひずみ理論を用いて定式化されたものを用いる。板の異方性を表わすために、Cauchy応力 $\sigma_{ij}$ の2次形式で表される降伏関数を用いると、弾塑性体の構成式は次式となる<sup>1)</sup>。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = B^e_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{3}{2H} \dot{n}_{ij} + \frac{3}{2H_s} \dot{t}_{ij} \quad (1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} B^e_{ijkl} &= \frac{1}{2G} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} \\ \dot{n}_{ij} &= \left( \frac{\dot{\sigma}}{\bar{\sigma}} \right) l_{ij}, \quad \dot{t}_{ij} = \dot{l}_{ij} - \dot{n}_{ij}, \quad (2) \\ \dot{l}_{ij} &= C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \\ H &= \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p}, \quad H_s = \left( \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}_p} \right) / \omega, \end{aligned}$$

上式で、 $\bar{\sigma}$  と  $\bar{\epsilon}_p$  はそれぞれ相当応力と相当塑性ひずみ速度である。 $(\cdot)$  は  $(\cdot)$  の物質導関数を表す。式 (1) の右辺第2項は  $l_{ij}$  方向、第3項は  $l_{ij}$  に垂直な方向の塑性ひずみ速度成分を表す。 $\dot{n}_{ij}$  と  $\dot{t}_{ij}$  はそれぞれ  $l_{ij}$  方向の応力速度成分とそれに垂直な成分を表す。 $\omega \rightarrow 0$  のとき、上式は流れ理論による構成式に一致する。直交異方性体に対して、異方性パラメータ  $C_{ijkl}$  は文献<sup>2)-5)</sup> に与えられている。式 (1) の逆関係を求め、応力速度とひずみ速度の関係を表す構成テンソルを  $L^{ijkl}$  で表示する。 $\dot{\sigma}^{kl}$  を Kirchhoff 応力の Jaumann 速度  $\overset{\nabla}{\sigma}^{kl}$  に、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  を変形速度テンソル  $d_{ij}$  に置き換えることにより構成式を一般化できる。

$$\dot{\sigma}^{ij} = L^{ijkl} d_{kl} \quad (3)$$

更に、本研究では、薄板・殻を扱うので、式 (3) は板厚方向平面応力状態の場合の構成式に特殊化された次式が用いられる。

$$\tilde{L}^{ijkl} = L^{ijkl} - L^{ij33} L^{33kl} / L^{3333} \quad (4)$$

各種板材の特性に応じて、上記構成式的具体形が得られる。その詳細は、文献4)、5) に示されている。

### 3.2 分岐点としてのしわ座屈発生条件

ここで、膜変形を受けている殻がより複雑な面内変形あるいは曲げを伴う面外変形へ分岐する場合の変形分岐点を解析する手法を示す。板、殻の変位速度場の表示には Naghd<sup>6)</sup> の線形理論を用いる。板、殻中央面に曲線座標  $y^I$  ( $y^1, y^2$ ) をとり、それらに垂直に直線座標  $y^3$  をとる。今後、小文字及び大文字の指標の変化範囲をそれぞれ1~3及び1~2とする。殻体中央面 ( $y^I, 0$ ) の変位速度を  $v_i$  とすると、任意の点  $y^I$  における変位速度  $V^I$  は次のように表すことができる。

$$V^I = v^I + y^3 \delta^I, \quad V^3 = v^3 + y^3 \delta^3 \quad (5)$$

ここで、 $\delta^i y^3$  は点 $(y^I, y^3)$ の点 $(y^I, 0)$ に対する相対速度を表す。中央面における変位速度勾配  $v_{ij}$ 、回転速度  $\omega_{ij}$ 、ひずみ速度  $d_{ij}$ 、曲率の変化  $\kappa_{ij}$  は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} v_{IJ} &= v_{IJ} - v_3 b_{IJ}, & v_{3I} &= v_{3,I} + v^J b_{IJ}, \\ v_{I3} &= \delta_I, & v_{33} &= \delta_3 \\ \omega_{IJ} &= \delta_{IJ} - \delta_3 b_{IJ} - b^M_{.I} v_{M|J} + v_3 b^M_{.I} b_{MJ}, \\ \omega_{I3} &= -b^M_{.I} \delta_M, & \omega_{3I} &= \delta_{3,I} + \delta^M b_{MI} \\ d_{IJ} &= 1/2(v_{IJ} + v_{JI}), & d_{I3} &= 1/2(v_{I3} + v_{3I}) \\ \kappa_{IJ} &= 1/2(\omega_{IJ} + \omega_{JI}), & \kappa_{I3} &= 1/2\delta_{3,I} \end{aligned} \quad (6)$$

上式で、 $( ) | I$  は  $( )$  の中央面における共変微分を、 $b_{IJ}$  は第2基本計量テンソルである。曲面板あるいは殻の場合、膜ひずみ速度成分に面外変位速度成分が入ってくることになり、くびれ形の面内変形に曲げモードが、曲げ形の面外変形に面内変形モードが影響するので、両者を分離できない。式(6)を用いて表示される殻内の任意の点の変位速度勾配とひずみ速度を分岐汎関数式<sup>7)</sup>に導入することによって、一般の殻体に対する分岐汎関数式が得られ、次式のようになる<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned} I &= \int_A \left[ t \left\{ \tilde{L}^{IJKL} d^*_{IJ} d^*_{KL} + 4\tilde{L}^{I3J3} d^*_{I3} d^*_{J3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma^{IJ} (v^*_{.M} v^*_{MJ} + v^*_{3I} v^*_{3J}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t^3}{12} \left\{ \tilde{L}^{IJKL} \kappa^*_{IJ} \kappa^*_{KL} + 4\tilde{L}^{I3J3} \kappa^*_{I3} \kappa^*_{3J} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma^{IJ} (\omega^*_{.I} \omega^*_{MJ} + \omega^*_{3I} \omega^*_{3J}) \right\} \right] dA \quad (7) \end{aligned}$$

式(7)で表される汎関数が、 $\delta I=0$ を満足し、非零の解が存在する時、変形に分岐が可能になる。汎関数の被積分項には、変  $v^*_{.i}$ 、 $\delta^*_{.i}$  及びこれらの一次導関数が含まれるのみであるので、これらを有限要素近似し表示する場合、要素間で関数の連続性を満足する  $C^0$  級の形状関数を用いることができる。

提案された分岐汎関数式(7)は有限要素近似され、節点における速度の値を成分とするベクトル  $\{\delta^*\}$  の2次形式で次のように表現できる。

$$I = \{\delta^*\}^T [K] \{\delta^*\} \quad (8)$$

分岐条件は、

$$[K] \{\delta^*\} = 0 \quad (9)$$

となる、したがって、非零の  $\{\delta^*\}$  が存在するとき、分岐が発生するので、分岐の発生条件は次のようになる。

$$\det[K] = 0 \quad (10)$$

膜変形を表す基本解を解析する各増分ステップで、式(10)が満足されるか否かを調べることにより、分岐の発生を知ることができる。ただし、完全に式(10)を満足する変形状態を見つけることは困難であるので、 $\det[K]$ の符号が変化したとき、その間の変形ステップを小さくして繰り返し計算法によって、 $\det[K]=0$ を満足する点を求める。

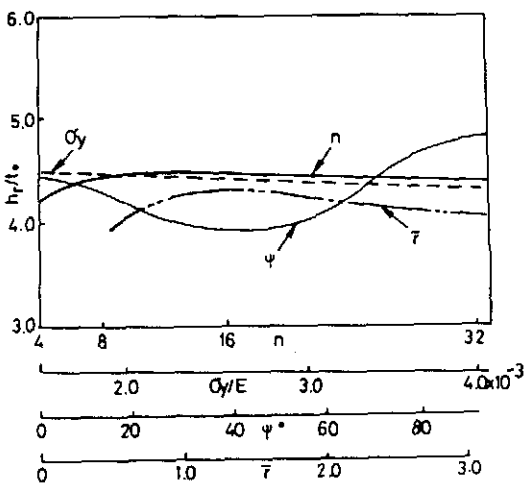
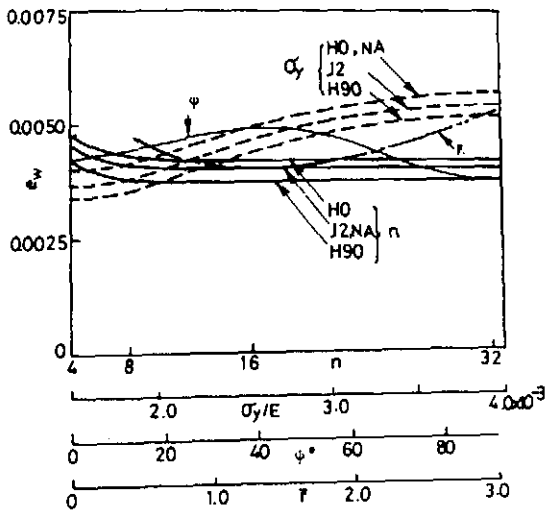
### 3.3 しわの発生が広範囲におよぶ場合

任意の領域にしわが発生する場合、分岐汎関数(7)を特殊化し、しわ発生挙動を予知する手法の実際について説明する。いま、面内変形は、平面内で発生する場合に限定をして議論を進めることにする。この場合、第2基本計量テンソルは、 $b_{IJ}=0$ となり、面内変形と面外変形が分離できるので、式(7)より本研究の対象となる面外変形に分岐汎関数  $I_0$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A \left[ \frac{t^3}{12} (d_1^{*T} D_1 d_1^* + g_1^{*T} Q_1 g_1^*) \right. \\ &\quad \left. + t (d_2^{*T} D_2 d_2^* + g_2^{*T} Q_2 g_2^*) \right] dA \\ d_1^{*T} &= (\delta^*_{.x,x} + \delta^*_{.y,y} \delta^*_{.x,y} + \delta^*_{.y,x}), \\ d_2^{*T} &= (w^*_{.x} + \delta^*_{.x} w^*_{.y} + \delta^*_{.y}), \\ g_1^{*T} &= (\delta^*_{.x,x} \delta^*_{.y,y} \delta^*_{.x,y} \delta^*_{.y,x}), \\ g_2^{*T} &= (w^*_{.x} w^*_{.y}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $x, y$  平面を考えたとき、 $w^*$  はたわみ速度、 $\delta^*_{.x}$  と  $\delta^*_{.y}$  はそれぞれ  $y, x$  軸に対する回転速度である。汎関数  $I_0$  の停留条件を求めるために、ひずみ速度  $d^*_{.1}$ 、 $d^*_{.2}$  変形速度勾配  $g^*_{.1}$ 、 $g^*_{.2}$ 、を有限要素近似し得られた式(10)と同じ形式の分岐条件式により、しわ発生点を求める。

このような手法により、いわゆるYBTの解析とそのしわ発生挙動に及ぼす材料特性、板形状等の影響が明らかにされた。更に、しわの成長挙動ならびに除荷後のしわの残留について検討が加えられている。図1は、直交異方性薄板のしわ発生挙動と残留しわの大きさを表している。更に、図2は、薄板圧延時に発生する垂直、並びに横断のしわの発生を予知した結果である。これらの結果の詳細並びにロールクラウン形状による不均一引張が引金となるしわ発生については、文献1)、8)、9)において詳細が示されている。



11 しわ発生  $e_w$  (上)、残留しわ高さ  $h_r$  (下) に及ぼす加工硬化指数  $n$ 、降伏応力  $\sigma_y$ 、垂直異方性  $\bar{\nu}$ 、引張方向  $\psi$  の影響。 $e_w$  は YBT におけるしわ発生時の伸びひずみ。 $t$  は板厚。その他の詳細は、文献 1 を参照。

### 3.4 しわ発生が比較的局所に限定できる場合

前節とは異なり、しわの影響が比較的局所に限定される場合、一樣な変形状態からのしわ発生が可能になる。このような場合に、3.2節において展開した、膜応力状態にある殻の変形から面外変形への変形の変岐定理を特殊化する。肉厚に比べて殻の曲率半径は大きいとし、Kirchhoff - Love の仮定

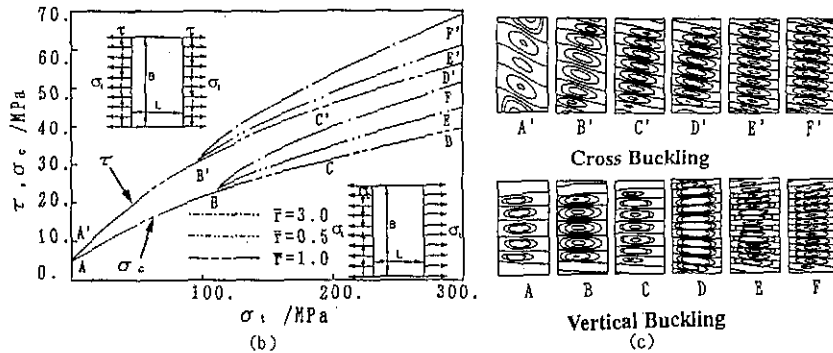
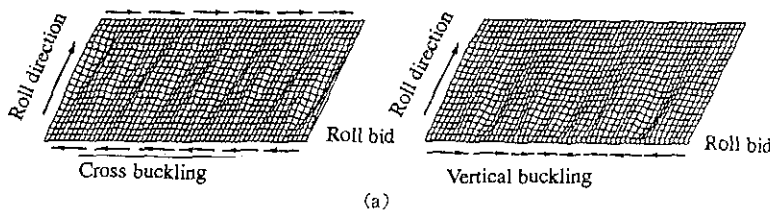
$$\delta_I = -(v_{3,I} + b^L v_{L,I}), \quad \delta_3 = 0 \quad (12)$$

を導入すると式 (7) は更に簡単化され、以下のようなになる。

$$I = \int \left\{ \frac{t^3}{12} \tilde{L}^{IJKL} \kappa_{IJKL} + t \tilde{L}^{IJKL} d_{IJS} d_{KLS} + t \sigma^{IJ} v_{3,I} v_{3,J} \right\} dS \quad (13)$$

更に、しわ発生を検討する領域を、図3に示すように肉厚が  $t$  で、殻の主曲率半径をそれぞれ  $R_1, R_2$  の殻要素を考える。また、 $x_1, x_2$  方向は主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  方向に一致しているものとする。しわが発生したときの、 $x_1, x_2$  方向の変位速度を  $v_1, v_2$  厚板中央に垂直な方向 ( $x_3$ ) の変位速度を  $v_3$  で表わす。いま、しわのモードとして、以下のものを考える。

$$\begin{aligned} v_3 &= At \cos \frac{\lambda_1 x_1}{l} \cos \frac{\lambda_2 x_2}{l} \\ v_1 &= Bt \cos \frac{\lambda_1 x_1}{l} \sin \frac{\lambda_2 x_2}{l} \\ v_2 &= Ct \cos \frac{\lambda_1 x_1}{l} \cos \frac{\lambda_2 x_2}{l} \end{aligned} \quad (14)$$



薄板成形時に発生する垂直しわ (vertical buckling) と横断しわ (cross buckling) の解析結果 (a) 境界条件、(b) しわ発生限界、(c) しわモード。詳細は文献 9 を参照。

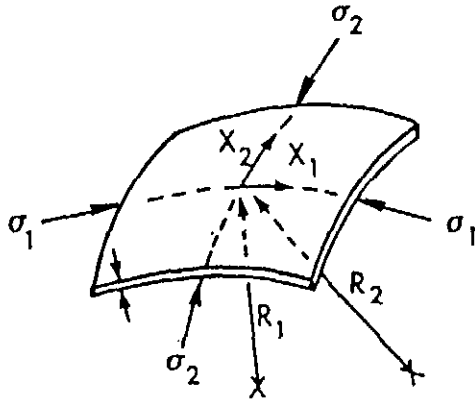


図3 殻要素とそれに作用する応力

ここで、 $A, B, C$ は定数で、モード振幅を表わしている。しわモードの波長を $l$ とすると、 $\lambda$ はモード番号、 $L=2\pi l/\lambda$ 、 $l^2 = Rl$ 。

さきにも述べたように、しわの発生は局所的であるとし、一つの波長部分を取り出して解析することとする。図3に示すように $x_1, x_2$ 方向に圧縮主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ が作用しているとする。このとき、式(14)から、 $\kappa_{IJ}, d_{IJ}, v_{3,I}$ を求めて式(13)に代入すると次式を得る。

$$I = \beta t \left(\frac{t}{l}\right)^2 \{A\} [M] \{A\}^T \quad (15)$$

なお、 $\beta$ は定数、 $\{A\} = (A \ B \ C)$ 、マトリクス $[M]$ は $3 \times 3$ マトリクスで、その成分は非常に長くなるので具体形<sup>11)</sup>は省略する。式(15)から、しわ発生条件は、

$$[M] \{A\}^T = 0 \quad (16)$$

となる。更に、しわが $x_1$ 方向に垂直な場合、 $\lambda_2=0$ となるので、式(14)から、 $C$ の値を自由に選ぶことができる。したがって、式(16)で、 $A, B$ が非自明解を持つ条件は、

$$D = M_{11}M_{22} - M_{12}^2 = 0$$

となる。具体的には、

$$D = \left\{ \frac{1}{12} (t/l)^2 \tilde{L}_{1111} \lambda_1^4 + \tilde{L}_{2222} (l/R_2)^2 - \sigma_1 \lambda_1^2 \right\} \tilde{L}_{1111} \lambda_1^2 - \tilde{L}_{1122} \lambda_1^2 (l/R_2)^2 = 0 \quad (17)$$

これにより、

$$\sigma_1 = \left[ \frac{1}{12} (t/l)^2 (\tilde{L}_{1111}^2 \lambda_1^4) + \tilde{L}_{2222} \tilde{L}_{1111} (l/R_2)^2 - \tilde{L}_{1122}^2 (l/R_2)^2 \sigma_1 \right] / \tilde{L}_{1111} \lambda_1^2 \quad (18)$$

がしわ発生時の応力である。最小値を求めると、

$$\lambda_1^4 = 12(\tilde{L}_{1111} \tilde{L}_{2222} - \tilde{L}_{1122}^2) / \tilde{L}_{1111}^2 \quad (19)$$

これにより、しわ発生時の応力 $\sigma_1^{cr}$ は

$$\sigma_1^{cr} = \frac{1}{3} \left( \frac{t}{R_2} (\tilde{L}_{1111} \tilde{L}_{2222} - \tilde{L}_{1122}^2)^{1/2} \right) \quad (20)$$

$\sigma_1$ と $\sigma_2$ の任意の組合せに対して、構成式により、構成テンソル $\tilde{L}_{1111}, \tilde{L}_{2222}, \tilde{L}_{1122}$ を求め、式(20)に代入することにより、 $\sigma_1$ についての非線形代数方程式を得る。これを、 $\sigma_2$ を変化させ、Newton-Rapson法等を用いて解析することにより、式(20)を満足する応力 $\sigma_1, \sigma_2$ を求めることができる。このようにして得られた応力を、 $\sigma_1, \sigma_2$ を直交軸とする座標面上に図示することによりしわ発生限度線図(WLD)を求めることができる。

NealeとTugcu(10)は等方性体に対して、Donnell-Mushtari-Vlasovの浅い殻理論によりしわ発生条件を求めている。本研究では、Naghdiの一般殻理論を基礎として、薄板において重要な面内及び垂直異方性を考慮できる形に一般化した。実際の異方性パラメータを、式(14)に導入することにより、対応した式(20)の具体形が得られる。上記と同様にして、式(20)を満足する $\sigma_1, \sigma_2$ を求めることにより対応したWLDを求めることができる。

### 3.5 まとめにかえて

Hillの分岐定理とNaghdiの殻理論を用いて、面内変形を受ける膜にしわが発生する条件を求めた。これを、広範囲にしわが発生する場合と、局所に留まる場合に分けて、それぞれについてしわ発生条件式を特殊化した。後者については、薄い板の主曲率半径 $R_1, R_2$ で対応する方向に $\sigma_1, \sigma_2$ なる主応力が作用する場合のしわ発生条件式を示した。この式に、各種異方性体の構成式を導入することにより、しわ発生時の薄板の主曲率、 $R_1, R_2$ 、板厚 $t$ 、異方性パラメータ、主応力 $\sigma_1, \sigma_2$ の関係(WLD)を求めることができる。導入した式は比較的簡単な形をしているので、薄板の成形シミュレーションプログラムに組込むことも容易であり、膜変形の解析から、しわ発生の有無を予測することも可能となる。

## 4. 発表論文

これまでに、公表した関連論文は、文献9及び第18回国際理論及び応用力学連合講演会(18th ICTAM, Haifa Israel, 1992)における招待講演論文である。WLDのみに関する論文11は、投稿のために準備中である。

本研究の遂行に対して多大なご援助を賜った、天田金属加工機械技術振興財団に対して深く感謝する。また、原稿作成に当り、神戸大学固体力学研究室の宮本浩臣君の手をわずらわせた。ここに期して感謝する。

## 5. 文 献

- (1) Tomita, Y., Shindo, A. : Int. J. Mech.Sci. , 30 (1988), 931.
- (2) Hill, R. : Mat. Proc. Camb. Phil. Soc. , 85 (1979), 179.
- (3) Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity (1950), 318.
- (4) Neale, K. W. : SM Arch. 6 (1980), 79.
- (5) 富田、数値弾塑性力学、有限要素法シミュレーション—基礎と応用、(1990), 175,養賢堂.
- (6) Naghdi, P. M. : The theory of shells and plates, Handbuch der Physik, VIa/2 (1972), Springer – Verlag.
- (7) Hill, R. : J. Mech. Phys. Solids, 6 (1958), 236
- (8) Tomita, Y. and Shindo, A. : Inoue, T. et al.(eds.) Computational Plasticity, CJMR,(1990) 165. Elsevier.
- (9) Tomita, Y. and Shao, H. : AEPA'92 (1992) 923, Elsevier.
- (10) Neale, K. W. and Tugcu, P. : Int. J. Num. Meth. Eng. , 30 (1990) 1595.
- (11) 富田 : 投稿準備中