

高精度破断予測を目的とした異方性塑性構成式に関する研究

慶應義塾大学 理工学部システムデザイン工学科

専任講師 大家 哲朗

(平成 27 年度 一般研究開発助成 AF-2015026)

キーワード：成形限界予測，分岐理論，非関連流れ則

1. 研究目的

環境保護等の観点から機械構造物の軽量化が促進されているが、それに伴って高張力鋼や非鉄金属合金等の難成形材の適用機械が増加している。成形時に起きる問題として大きなものに被加工材の破断が挙げられるが、難成形材においてはその予測と対策は一層困難である。本研究の目的は、計算機シミュレーションによって、高精度に破断発生の時期と位置を予測できるようにすることで実験・試作の手間を低減し、設計開発の効率化へ寄与することである。提案する破断予測手法は分岐理論に基づいて構築されており、実験式の延長である延性破断条件式よりも一般性が高く使用者の負担も小さい。本理論は応力増分依存性塑性構成式、非関連流れ則、3次元局所分岐理論に基づいて構築されており、分岐解析によってSHFLDと呼ばれる成形限界曲線図を計算のみによって取得できる。これは物理的妥当性を有するのみならず、通常のFLDに要求されるような実験を必要としない。ゆえに成形・解析技術者の負担を大幅に減らすことができると期待される。基礎理論の構築は概ね終了し、実験および計算機シミュレーションによる有用性の検証を行った^{1)~5)}ので以下に報告する。

2. 非関連流れ則モデル

後述する3次元局所分岐理論に基づく分岐解析実施のためには応力増分依存型塑性構成式(修正 Ito-Goya 構成式)を用いるが、そこでは降伏関数と塑性ポテンシャル関数の役割が独立している。そのため非関連流れ則に基づく定式化が必須だが、適切なモデルが存在しなかった。そこで任意材料に対応するための高次関数化と材料試験負担低減を両立できるようなモデルを考案した。以下ではその導出過程を簡潔に示す。

2.1. Hill48 モデルの導出過程

2次降伏関数(Hill48)の場合の相当塑性ひずみ増分の導出過程を示す。偏差応力ベクトル \mathbf{s} と、異方性行列 \mathbf{A} を以下のように定義する。

$$\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}^T$$
$$= \{\sigma_y - \sigma_z, \sigma_z - \sigma_x, \sigma_x - \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} : A_{11} = F, A_{22} = G, A_{33} = H, A_{44} = 2L,$$
$$A_{55} = 2M, A_{66} = 2N, \quad A_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2)$$

降伏関数 $f(\boldsymbol{\sigma})$ を用いて降伏条件は以下のように表される。

$$2f(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} \quad (3)$$

このとき相当応力は、等方性の場合に J_2 に一致するように、以下のように定義される。

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2(F+G+H)} (\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}) = \frac{3f(\boldsymbol{\sigma})}{2(F+G+H)} \quad (4)$$

次に、塑性ひずみ増分ベクトルを

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}, d\gamma_{xy}\}^T \quad (5)$$

とすると、流れ則は

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} d\boldsymbol{\Lambda} \quad (6)$$

と書ける。ここで行列 \mathbf{C} は異方性パラメタを成分に持つコンプライアンス行列である。行列 \mathbf{C} の逆行列を行列 \mathbf{B} とおくと、流れ則の逆関係の次式が得られる。

$$\mathbf{s} d\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P \quad (7)$$

また、塑性ポテンシャル関数が2次の斉次式であることを考慮し、塑性仕事増分の表現を得る。

$$dW^P = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\Lambda} = f(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\Lambda} \quad (8)$$

これまでの関係式を用いて整理すると、次式のような相当塑性ひずみ増分の定義式が得られる。

$$d\bar{\varepsilon}^P = \sqrt{\frac{2(F+G+H)}{3} (\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P)} \quad (9)$$

2.2 高次降伏関数と相当応力の定義

まず、 m_y 乗化された新たなベクトル \mathbf{s}_{m_y} を用意する。

$$\mathbf{s}_{m_y} = \{s_1^{m_y}, s_2^{m_y}, s_3^{m_y}, s_4^{m_y}, s_5^{m_y}, s_6^{m_y}\}^T \quad (10)$$

Hill48 の場合と同じ異方性行列 \mathbf{A} を用いて2次形式 $\mathbf{s}_{m_y}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_{m_y}$ を作る。 $f(\boldsymbol{\sigma})$ を相当応力 $\bar{\sigma}$ に等しいとして次のように定義する。

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} = \sqrt[2m_y]{\frac{3}{2(F+G+H)} (\mathbf{s}_{m_y}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_{m_y})} \quad (11)$$

$$= \sqrt[2m_y]{\frac{3F(\sigma_y - \sigma_z)^{2m_y} + G(\sigma_z - \sigma_x)^{2m_y} + \dots}{F+G+H}}$$

2.3 非関連流れ則における相当塑性ひずみ増分

非関連流れ則では、現在の応力に対して次の瞬間に生じる塑性ひずみ増分方向を与える塑性ポテンシャル関数には降伏関数とは異なる関数を採用する。本研究では、塑性ポテンシャル関数を定義するために、 $f(\boldsymbol{\sigma})$ と同一形式だが異なるパラメータをとる別の関数 $g(\boldsymbol{\sigma})$ を用いる（偽相当応力とも呼称）。この場合の各異方性パラメータには*をつけて区別する（これに伴って行列 \mathbf{A} も \mathbf{A}^* となる）。式(11)より、 m_p 乗の塑性ポテンシャル関数は次のようになる。

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} = \sqrt[2m_p]{\frac{3}{2(F^* + G^* + H^*)} (\mathbf{s}_{m_p}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{s}_{m_p})} \quad (12)$$

塑性ポテンシャル関数 $g(\boldsymbol{\sigma})$ に流れ則を適用し、さらに塑性仕事等価の条件を用いると以下のように相当塑性ひずみ増分式が得られる。

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{m_p \bar{\sigma}^{m_p}}{\bar{\sigma}} \sqrt{\frac{2F}{3} (\mathbf{B}_{m_p}^* \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p)^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot (\mathbf{B}_{m_p}^* \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^p)} \quad (13)$$

ただし $F = (F^* + G^* + H^*)$ としている。

2.4 異方性パラメータの決定法

未決定の異方性パラメータは、平面応力を想定すると降伏関数内の (F, G, H, N) と塑性ポテンシャル関数内の (F^*, G^*, H^*, N^*) となる。前者は流動応力異方性を表しているため、異方性主軸方向の各流動応力 X, Y, Z により決定できる。

$$F : G : H = \left(\frac{1}{Y^{2m_y}} + \frac{1}{Z^{2m_y}} - \frac{1}{X^{2m_y}} \right) : (\text{略}) : (\text{略}) \quad (14)$$

後者は変形異方性を表しており、従来よく行われているように、圧延方向 (0°) 、圧延方向から 45° の方向、圧延直角方向 90° の引張り試験結果より得られる r 値、すなわち r_0, r_{45}, r_{90} から決める。

$$\frac{G^*}{H^*} = \frac{1}{r_0}, \frac{F^*}{H^*} = \frac{1}{r_{90}}, \frac{N^*}{H^*} = \left(r_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_{90}} \right) \quad (15)$$

圧延方向、圧延直角方向の引張り試験およびバルジ試験を実施し、応力-ひずみ曲線を測定する。これらの塑性流動応力をそれぞれ σ_0, σ_{90} および σ_B とし、硬化発展則(相当応力-相当塑性ひずみ)を以下のように表す。

$$\sigma_0 = F_0(\varepsilon_0), \sigma_{90} = F_{90}(\varepsilon_{90}), \sigma_B = F_B(\varepsilon_B) \quad (16)$$

例えば、圧延方向の単軸引張り時の相当応力-相当塑性ひずみ曲線は以下のようになる。

$$\bar{\sigma} = \sqrt[2m_y]{\frac{3}{2F+G+H} F_0 \left(\sqrt[2m_y]{\frac{2F+G+H}{3} \frac{G+H}{G+H} \bar{\varepsilon}^p} \right)} \quad (17)$$

圧延方向引張り最大荷重時の応力を X とし、そのときの伸びひずみを ε_0^c として、そのひずみまでの塑性仕事量を評価し W_0^p とおく。他の方向については、それぞれの硬化発展則を用いて同じ塑性仕事量となる時点での応力値を求

めそれを Y, Z とする。異方性パラメータ N については直接決定するのではなく実験で得られた 45° 方向の硬化発展則と計算値の誤差が最小になるように探索して決定する。

2.5 塑性ポテンシャル関数に関する考察

式(13)中の行列 $\mathbf{B}_{m_p}^*$ は Hill48 における定式(9)内の行列 \mathbf{B} と同じ来歴を持つが、ここでは提案する非関連流れ則の式展開中に現れるものであり、異方性パラメータとして F^*, G^*, H^* 、また塑性ポテンシャル関数のべき乗数 n を変数として持つものである。これはコンプライアンス行列 \mathbf{C} の逆行列であることが期待される行列であるが、 \mathbf{C} は行列式が0であるために逆行列は持たない。このため試行錯誤的に導出した行列 \mathbf{B} を用いてきた。平面応力下で単軸の応力状態の場合の数値検討により、等方性かつ $m_p=1$ の場合には理論上問題無いことが確認されている。しかし、高次の塑性ポテンシャル関数すなわち m_p を2以上にした場合には問題が生じていた。このため、任意次数の塑性ポテンシャル関数を適用するためには更なる検討が必要であった。不具合が生じた原因としては行列 \mathbf{B} の性質が考えられたので、行列 \mathbf{B} の性質と作成法についての検討を行った。

Penrose によると行列 \mathbf{A} に対して下記の四つの条件を同時に満たす \mathbf{A}^+ を一般逆行列と呼ぶ。

$$\text{条件 1 } \mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\text{条件 2 } \mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$$

$$\text{条件 3 } (\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$$

$$\text{条件 4 } (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$

この四つの条件を満たす行列は一つしか存在しない。

Penrose の定義では四条件すべてを同時に満たすものを一般逆行列と呼んでいるが、条件 1のみを満たすものを単に一般逆行列と呼び \mathbf{A}^- と表すこともある。この場合、 \mathbf{A}^- は行列 \mathbf{A} に対して複数存在し、唯一に決まるわけではないが、単に連立方程式 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ を解くということが目的であれば、 \mathbf{A}^- を見つければ十分である。しかし、この場合は特解部分がノルム最小解であるとか、不能の場合にも最小二乗解になっているといった特徴は保証されない。工学的には四条件すべてを満たす Moore-Penrose 一般逆行列がノルム最小かつ最小二乗の唯一解を与えるので価値が高い。Penrose の定義に出てくる条件を部分的に使うと以下のように種々の一般逆行列を考えることができる。

Table 1 種々の一般逆行列 (一部のみ)

| タイプ | 同時に満たす条件 | 記号 |
|-----|---------------|------------------|
| 1 | 条件 1 | \mathbf{A}^- |
| 2 | 条件 1, 2 | \mathbf{A}_r^- |
| 7 | 条件 1, 2, 3, 4 | \mathbf{A}^+ |

平面応力下で単軸応力状態を想定すると、応力成分が $\sigma_x = \sigma, \sigma_y = \sigma/2, \sigma_z = 0$ かつひずみ成分が $d\varepsilon_x = d\varepsilon, d\varepsilon_y = 0, d\varepsilon_z = -d\varepsilon$ のようになる。このとき塑性仕事 $\bar{\sigma}d\bar{\varepsilon}^p$ を計算

するとパラメタの如何に関わらず常に結果が $\sigma d\varepsilon$ となるはずである。しかし以前導出した行列 B では $m_p=1$ のときの場合のみに $\sigma d\varepsilon$ の係数が 1 になり、 m_p が 2 以上のときにはそうならなかった。ゆえに塑性ポテンシャル関数の高次化が必要な場合に問題があった。

この行列 B は条件 1 と 2 を満たしているが条件 3 と 4 は満たさなかった。これは行列 B が反射型一般逆行列 (Table 1 中のタイプ 2) と呼ばれるものであることを示している (つまり $B = C^+$)。つまり、式(7)に相当する方程式を解くことは可能であるが解の一意性が保証されたものではない。

今回の検討では、行列 B を四条件すべてを満たす $B_{MP} = C^+$ を用いて $\sigma d\varepsilon^p$ の係数計算を行った。これは Table 1 中のタイプ 7 であり、Moore-Penrose 一般逆行列と呼ばれる。ここでは特異値分解による手法で計算した。

まず $F = G = H = F^* = G^* = H^* = 1$ かつ $m_p=1$ の場合であるが、この場合は従来の行列 B と B_{MP} が一致し、 $\sigma d\varepsilon^p$ の係数が 1 となった。これは以前得た結論であるが、今回 B_{MP} を確認することによって、より意味合いが明確になった。つまり、 $m_p=1$ の場合には従来の行列 B が数値的に Moore-Penrose 一般逆行列に一致しているため、正確な解が得られていたと考えられる。次に m_p を任意に変化させてみた。従来の行列 B を用いた場合は、以前検証したように、 $\sigma d\varepsilon^p$ の係数が 1 にはならなかった。しかし、代わりに B_{MP} を用いたところ、任意の m_p に対して係数は常に 1 となった。

次に塑性ポテンシャル中の異方性パラメタ F^*, G^*, H^* を変化させた検討を行った。この場合には $\sigma d\varepsilon^p$ の係数は数値的に完全に 1 にはならなかった。等方性からのずれが大きくなるほど 1 からの誤差が大きくなる傾向が見られた。また、同じ異方性パラメタ値の場合には塑性ポテンシャル関数の次数 m_p が大きくなるほど誤差が減少した。例えば $F^* = 1, G^* = 2, H^* = 3$ のときに $m_p=1, 2, 4$ と変化させた場合の誤差は、6.5, 2.1, 0.14% であり、 m_p が 6 以上の場合にはほぼ無視できる誤差となることがわかった。以上より、極端に異方性が強い場合でも高次関数を適用することで実用上の問題が無くなると思われる。

今回の検討により、コンプライアンス行列 C に対する逆関係の行列として Moore-Penrose 一般逆行列 B_{MP} を適用することで、任意の m_y と m_p に対してより正確な相当塑性ひずみ増分の表現が得られうることがわかった。

2.6 実験的検証事例

2.6.1 使用材料と実験内容

今回用いた材料はアルミニウム合金 A6061P-T6 の厚さ 1mm の板材である。圧延方向を RD, その直角方向を TD, 等二軸を EB, 平面ひずみを PS とする。板材から RD・TD 方向の単軸引張試験を実施するための JIS5 号試験片と、等二軸引張試験および平面ひずみ引張試験を実施するた

めの十字形試験片を切り出した。

各引張試験結果に対し、応力-ひずみ関係を Swift 則 ($\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon^p)^n$) によって表現した。その際には、各曲線の線形部分を用いた 0.2% 耐力によって初期降伏応力を代替した。各パラメタのフィッティング結果を Table 2 に示す。

Table 2 A6061 の材料試験結果

| | $\sigma_{0.2}$ | K | n |
|--------|----------------|-----|-------|
| RD | 275 | 443 | 0.103 |
| TD | 265 | 436 | 0.108 |
| EB | 295 | 414 | 0.070 |
| PS(RD) | 315 | 466 | 0.078 |
| PS(TD) | 308 | - | - |

Table 3 A6061 の Lankford 値

| | r_0 | r_{45} | r_{90} |
|-------|-------|----------|----------|
| A6061 | 0.58 | 0.67 | 0.67 |

2.6.2 降伏曲面の決定

材料モデルを使用する上で最初に行うことは関数の次数を決定することである。本研究では降伏関数の次数 m_y を実験データを用いて定めた。式(14)と Table 1 中の値を用いて降伏関数中の異方性パラメタ F, G, H を決める。すなわち、 $X=275, Y=265, Z=295$ を代入して F と G を m_y のみの関数として表す。ここで $H=1$ としている。 F, G, H を式(11)に代入し、降伏関数を未知定数 m_y で表す。このとき、RD, TD, EB の降伏応力値は Fig.1 に示すようにいかなる m_y のときでも曲面上に存在する。そして平面ひずみ時の降伏応力値を通過するように m_y の値を決定する。Fig.2 には m_y が 1, 2, 3, 4 の場合の降伏曲面の様子を示してあるが、今回の材料は異方性があまり強くなかったため、いずれの場合でもそれなりに近い状況となっている。しかし平面ひずみ引張時の降伏応力は RD 側で 315MPa であったが TD 側では若干低く 308MPa であったので、この偏りをよく表現するために $m_y=2$ が適していると考えられる。降伏曲面の次数を決めることで異方性パラメタ F, G, H もそれぞれ 0.65, 0.42, 1.0 と定まる。

2.6.3 塑性ポテンシャル曲面の決定

塑性ポテンシャル曲面は前述のように変形異方性を表すので r 値によって計算される。今回用いたアルミ合金板の r 値は Table 3 のようになった。これらの値から変形異方性パラメタは Table 4 のようになった。これらによって得られる塑性ポテンシャル曲面($m_p=1$)を Fig.3 に示す。同図では参考のため $m_y=2$ のときの今回の材料の降伏曲面形状も示してある。大きさの比較には意味が無いが、明らかに形状が異なっていることがわかる。特に力学的分岐が

生じるときのような応力場・変形場が急変する状況では、本モデルのように応力異方性と変形異方性を分離表現することが意味を持つ。今回のような比較的異方性が弱い板材であっても両曲面に明らかに違いが生じるため、本モデルの必要性が確認できる。

Table 4 A6061 の変形異方性パラメータの値

| | F^* | G^* | H^* | N^* |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| A6061 | 1.49 | 1.72 | 1 | 3.76 |

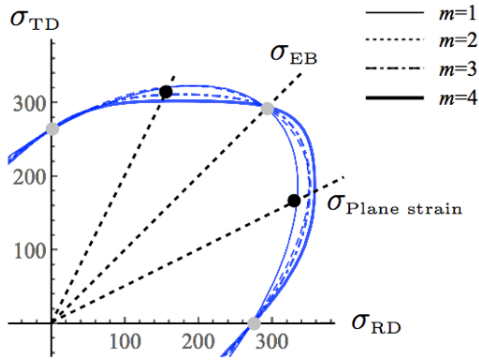


Fig.1 降伏曲面の次数決定

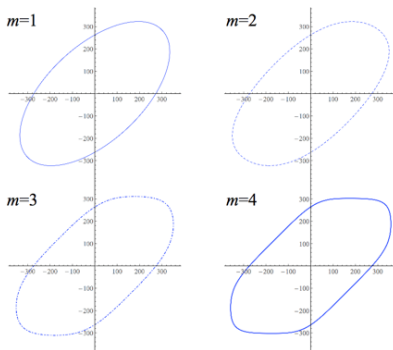


Fig.2 異なる次数に対する降伏曲面形状

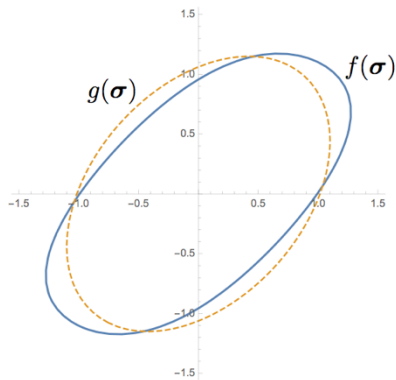


Fig.3 降伏曲面 $f(\sigma)$ と塑性ポテンシャル曲面 $g(\sigma)$ の比較

3. 3次元局所分岐理論に基づく成形限界予測

3.1 3次元局所分岐理論

本節では、我々が破壊予測のために適用している基礎理論である3次元局所分岐理論について説明する。

Hillの一般分岐理論に基づく、分岐は次の条件式を満たすときに発生する。

$$I[\Delta v] \equiv \int \Delta L : \dot{\Delta S} dV = 0 \quad (18)$$

ここで v は速度場、 L と \dot{S} は速度勾配テンソルと第1Piola-Kirchhoff応力速度(公称応力テンソル速度)である。後者はCauchy応力テンソルを用いて以下のようにも表すことができる。

$$\dot{S} = D : \dot{\epsilon} + \omega \cdot \sigma - \sigma \cdot \omega + \text{tr}(L)\sigma - L \cdot \sigma = A : L \quad (19)$$

ここで $\dot{\epsilon}$ 、 ω 、 D はそれぞれひずみ増分テンソル、スピントテンソル、接線剛性テンソルである。また、 A は4階のテンソルであり(材料モデル表現中で用いられている異方性パラメータを含む2階テンソルとは異なる)、公称応力速度と速度勾配テンソルを関連づけるものである。分岐モードを特徴づけるために速度勾配テンソルは分岐界面 Γ を横切の際に不連続となることが許される。この速度勾配テンソル L は、分岐界面への法線ベクトル n と、 n に垂直な局所変形モードベクトル m によって次のように表される。

$$L = m \otimes n \quad (20)$$

さらに、モードベクトル m は3つの異なるベクトルに分解できる。式(19)、(20)を式(18)に代入して整理すると次式を得る。

$$I[m, n; s] = hH[m, n; s] - \sigma \Sigma[m, n; s] \quad (21)$$

ここで σ は応力ノルム、 h は加工硬化率のノルムであり、式(21)右辺第1項と第2項は以下のようにになっている。

$$H[m, n; s] = m \cdot n \cdot \bar{D}(s) \cdot n \cdot m \quad (22)$$

$$\Sigma[m, n; s] = \frac{1}{2} [m \cdot s \cdot m - n \cdot s \cdot n] \quad (23)$$

大ひずみ域へと到達する弾塑性問題では弾性変形が無視でき、接線剛性テンソルが加工硬化率に比例すると仮定できる。この仮定下で、接線剛性テンソルは極分解形式で表現できる。

次に、現在の応力状態が以下のように表現できる。

$$\sigma = \sigma s, \quad \sigma = \sqrt{\sigma \cdot \sigma}, \quad s = \sigma / \sigma \quad (24)$$

ここで σ と s はそれぞれ現在の応力テンソルのノルムとそれぞれの応力成分のための応力比を与える正規化テンソルである。

これらの定式に基づき、最終的に次式のような局所分岐基準が得られる。

$$\left(\frac{\sigma}{h}\right)_{cr} = \min \left(\frac{H[m, n; s]}{\Sigma[m, n; s]} \right) \quad (25)$$

3.2 分岐モードベクトルの表現

Fig.4 に示すように、3次元の分岐モードベクトル m , n は以下ようになる。

$$\mathbf{n} = (\sin \phi \cos \psi, \sin \phi \sin \psi, \cos \phi) \quad (26)$$

$$\mathbf{m}_{SH} = (-\sin \phi, \cos \psi, 0) \quad (27)$$

$$\mathbf{m}_{SV} = (\cos \phi \cos \psi, \cos \phi \sin \psi, -\sin \phi) \quad (28)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{SH} \cos \theta + \mathbf{m}_{SV} \sin \theta \quad (29)$$

SR 分岐を表現する場合には以下のような表現となる。

$$\mathbf{n}_{SR} = (\cos \psi_s, \sin \psi_s, 0) \quad (30)$$

$$\mathbf{m}_{SR} = (\cos(\psi_s - \beta_s), \sin(\psi_s - \beta_s), 0) \quad (31)$$

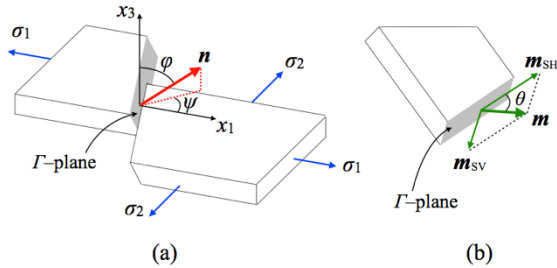


Fig.4 分岐モードベクトルの定義

3.3 Ito-Goya の塑性構成式への適用

局所分岐は応力増分方向に急激な変化をもたらす。古典的な J_2 流れ則では、後続する応力増分によるひずみ増分方向の変化を表現できないため、分岐問題を処理するには適さない。そこで本研究ではひずみ増分方向の応力増分への依存性を表現できる Ito-Goya の塑性構成式を適用する。本研究では次式のような修正された定式を用いている。

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \Lambda(\mathbf{n}_F : d\boldsymbol{\sigma}') [K_C \bar{\mathbf{l}} + (1 - K_C) \mathbf{n}_N] \quad (32)$$

ここで \mathbf{n}_N は順方向(Natural direction)と呼ばれる単位テンソルである。このテンソルは偏差応力増分方向 $d\boldsymbol{\sigma}'$ を示すが、これは塑性ひずみ増分方向と同一であるとしている。 K_C は 0 から 1 の間の値をとる応力増分方向への依存性を表すパラメータであり、材料の延性に関連づけられる。

3.4 成形限界予測の考え方

分岐基準である式(25)は局所分岐の発生を示すが、これは応力比テンソル s に基づくモードベクトル m と n によって記述されており、応力レベルと加工硬化率の比である σ/h によって表現されている。言い換えると、成形性を σ/h 平面上で表すことは、通常の FLD(Forming Limit Diagram)に見られるようなひずみ経路への依存性を排除できることを意味する。力学的には、 σ は破壊が発生する際の応力の大きさを意味し、加工硬化率 h は材料の破壊への抵抗を意味する。ゆえに成形性を σ/h 平面上で表すことは力学的に妥当である。このような形式の成形限界線図を SHFLD と呼称している。SHFLD は 2 本の包絡線で示される。下側は S-R (Stören-Rice)理論によって表される破壊予測値の下限であり、上側が 3次元局所分岐理論によって予測される破壊予測の上限値である。本手法では、実

際の材料の成形中における最終的に破壊につながるような分岐はこれらの上下限値の間で生じると考える。これは分岐解析のみで求まる材料のマスターカーブと言えるものであり、一般に FLD を取得する際のように実験を必要としないという利点がある。

4. 数値実験による検証

ここまでで説明した理論的枠組みを用いて、分岐解析による破壊限界予測手法確立のための解析的検討を行った。本解析では平面応力と等方性材料を仮定する ($F = G = H = F^* = G^* = H^* = 1$)。その他の材料パラメータとしてはヤング率 210GPa, ポアソン比 0.3, 加工硬化則とし n 乗硬化則 ($K = 5.0 \times 10^8$, $n = 0.2$) を用いる。調査のための変数としては、加工硬化係数評価点ひずみ値 ε_h と Ito-Goya 則における K_C 値である。式(22)にて接線剛性テンソル $\bar{\mathbf{D}}$ を用いているが、これはもとのテンソル \mathbf{D} を加工硬化係数 h で除したものである。すなわちテンソル \mathbf{D} が加工硬化係数 h に関して線形であることを仮定したがゆえであるが、実際にはテンソル \mathbf{D} は h に関して完全には線形ではない。解析を進めるために本研究では線形であるとしているが、非線形性の程度を調べるために加工硬化係数を評価するひずみ値 ε_h を様々に変化させて破壊限界曲線へ与える影響を調べた。また、 K_C 値は応力増分方向依存性を決定するパラメータであり、小さいほど応力増分方向依存性が小さいため分岐限界が遅れ(すなわち加工余裕度が増し)、大きいほど破壊発生判定が早まることを意味する。

分岐解析は式(25)の分岐発生基準式を用いる。右辺に含まれる変数は破壊モードベクトル m と n 中の分岐面角度 (ϕ, θ, ψ) である。この 3 変数を変化させて、基準式が最小値をとるときの角度値と基準式の値を求める。探索アルゴリズムには焼きなまし法を用いた。基準関数は三角関数をベースとした繰り返し構造になっており、ある周期性を持つ (ϕ, θ, ψ) の値ごとに同一の最小値をとるため、 $0^\circ \leq \phi, \theta, \psi \leq 90^\circ$ となる解を採用している。FLD 描画の際に応力テンソルは応力比パラメータ α を指定することで計算している。

まず、加工硬化係数評価点ひずみ値 ε_h を変化させた結果が Fig.5 である。値を 0.1, 0.3, 0.5 と変化させたが曲線はほとんど変化しなかった。このことは上述の線形化が妥当な仮定であることと、破壊限界予測に対して加工硬化係数が影響を与えないことを意味する。次に、 K_C 値を 0.1, 0.2, 0.3 と変化させた結果が Fig.6 である。 K_C 値が小さいほど曲線が上側に位置し、値の増加とともに下降している。このことは応力増分方向依存性の程度と破壊限界予測の関係性をきちんと表していることを意味する。これらの結果より、今回の定式と分岐解析は力学的に妥当な結果を表現できていることが確認できた。

Fig.7 は降伏関数の次数 m_y を変化させた場合の分岐限

界曲線の変化を調べたものである。図のように、曲線は次数の影響を受けていないことがわかった。さらに、応力異方性と変形異方性の影響を調べるために、擬似材料データによって2つのパターンの解析を行った。Fig.8は応力等方性・変形異方性の場合、Fig.9は応力異方性・変形等方性の場合である。これらから分岐限界曲線は変形異方性のみに依存することがわかった。これは降伏関数の次数を変えても曲線が変化しなかったことと矛盾せず、成形限界予測には応力増分依存性パラメータ K_C 値と変形異方性の程度が大きな影響を与えることが確認できた。

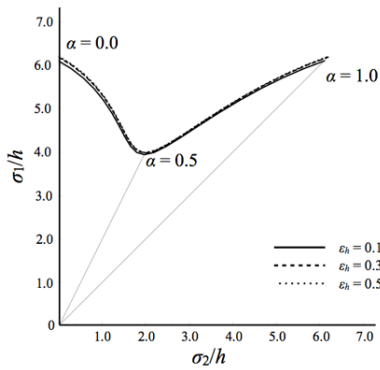


Fig.5 分岐解析結果：加工硬化の影響

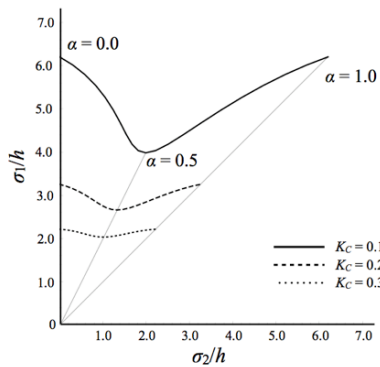


Fig.6 分岐解析結果： K_C 値の影響

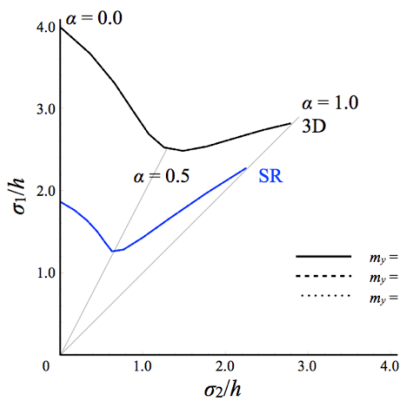


Fig.7 分岐解析結果：降伏関数次数 m_y の影響

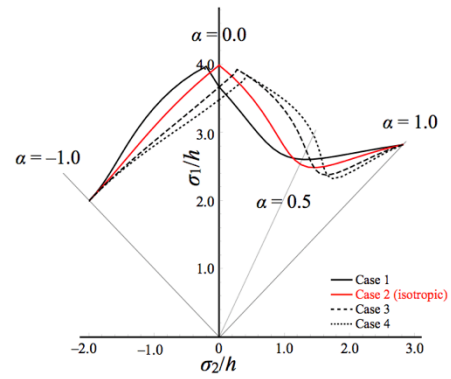


Fig.8 分岐解析結果：応力等方性・変形異方性の場合

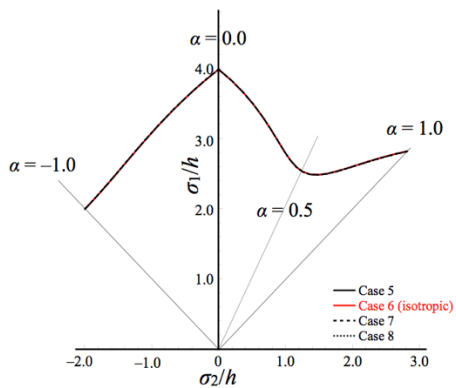


Fig.9 分岐解析結果：応力異方性・変形等方性の場合

5. 結言

本研究では、ユーザに負担をかけずかつ物理的妥当性の高い成形限界予測手法を実現するための検討を行ってきた。3次元局所分岐理論、応力増分依存性塑性構成式、非関連流れ則に基づく分岐解析の枠組みについては概ね完成し、数値的検証も行ってきた。今後は実験的検証の割合を増やし、提案手法の確立を目指す。

謝辞

本研究は平成 27 年度(公財)天田財団一般研究開発助成の支援によって行われたことをここに記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) T. Oya, J. Yanagimoto, K. Ito, G. Uemura, and N. Mori, MATEC Web of Conferences 80, 05003 (2016) 1-5.
- 2) T. Oya, J. Yanagimoto, K. Ito, G. Uemura, and N. Mori, Journal of Physics: Conference Series, 896, 012021 (2017) 1-6.
- 3) T. Oya, J. Yanagimoto, K. Ito, G. Uemura, and N. Mori, Proceedings of COMPLAS XIV (2017) 46-53.
- 4) T. Oya, J. Yanagimoto, K. Ito, G. Uemura, and N. Mori, Procedia Engineering, 207 (2017) 227-232.
- 5) T. Oya, J. Yanagimoto, K. Ito, G. Uemura, and N. Mori, Proceedings of 11th FTF (2018) 75-79.