

多結晶体モデルによる塑性構成式パラメータの決定

琉球大学 工学部 機械システム工学科

助教授 呉屋守章

(平成5年度研究開発助成 AF-93006)

1. 研究の目的と背景

塑性ポテンシャル理論に基づく塑性構成式として広く用いられてきたものに J_2 -Flow 則 (または, Prandtl-Reuss 則) があるが, 薄板の面内 2 軸荷形成形限界問題や殻構造物の塑性座屈問題の様な応力経路が急変する不安定問題に対して塑性ポテンシャル論を適用すると非現実的な結果をもたらすことが分かっている. その基本的理由として, 塑性ひずみ増分の応力増分方向不依存性という塑性ポテンシャル論として本質的な性質が, その原因あることが解明されてきた. こうした中において, 塑性構成式に関する研究が見直され, 例えば Christoffersen-Hutchinson による角点構成式論, 及び後藤による幾つかの角点構成式論が報告されてきた^(1, 2). 一方, 申請者は, 必ずしも角点の存在を前提としない応力増分方向依存性塑性構成式として, 速度量不依存型の増分の塑性構成式における本質的な 2 つの遷移関数, すなわち塑性ひずみ増分の大きさに関わる $\mu(\alpha)$ および塑性ひずみ増分の方角に関わる $\beta(\alpha)$ を導入して塑性構成式の一般的表现を応用性に富む形で提唱してきた⁽³⁾. ここで, α は偏差応力空間における順方向 (偏差応力増分と塑性ひずみ増分の方角が互いに一致する方向) からの偏差応力増分の振れ角を示す. これらの遷移関数を実験的に求めることは膨大な数の試料と精密な測定が必要となり, 実施することは大変な時間と経費を要する. 従って実験に代わる方法として, 近年発達してきた結晶理論に基づく有限要素法解析を利用することが考えられる. 過去には, μ と β を求めるために Kroner⁽⁴⁾, Budiansky & Wu⁽⁵⁾ による結晶モデル (Self-Consistent Model) を用いた研究や⁽⁶⁾ また多結晶体 Lin モデルを用いた研究⁽⁷⁾ が行われているが, これらのモデルは適用できる応力状態に限られていることや, 結晶の回転を考慮できないという問題がある.

これに対し有限要素多結晶モデルは, 適用される応力状態に制限が無く応用性の高いモデルを構築することが出来る. 微小変形に対しては神馬等⁽⁸⁾ や宮本等⁽⁹⁾ が取り扱っているが, その後, 後藤⁽¹⁰⁾ は結晶回転を考慮する大変形理論に基づき理論を展開した. 本研究の目的は, 各構成式パラメータの具体的関数形を種々の応力状態に対して検討するために, これらの理論に基づき有限要素多結晶モデルを開発し, 幾つかの比例荷重方向について得た結果を報告することである.

2. 研究方法

【応力増分方向依存性を考慮した塑性構成式の概略】 先に著者等が提案した塑性構成式の表現は以下の通りである. 順方向に一致する単位の大きさを持つテンソルを n_N と表し, そして, n_N の方向より定義された塑性荷重を生ずる偏差応力増分の最大振れ角を α_{\max} とする. さて, ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ に対して, $(n_N : \dot{\epsilon})$

$\angle(\sqrt{3/2}|\dot{\epsilon}|) > \cos \alpha_{\max}$ のとき塑性荷重となり次式が成立するものとし,

$$\dot{\sigma} = 2G^* \{ \epsilon + \nu^* / (1 - 2\nu^*) \dot{\epsilon}^P - (n_N : \dot{\epsilon}) n_N / S^* \} \quad (1)$$

ただし,

ϵ^V ; 体積ひずみ, K ; 体積弾性率, G ; 横弾性係数

$$G^* = GH' / (H' + 3G\mu \sin \beta / \sin \alpha)$$

$$S^* = \{ H' \sin^2 \alpha / (6\mu G) + \sin \alpha \cos \beta \} / \sin(\alpha - \beta)$$

$$\nu^* = \nu + E\mu \sin \beta / (2H' \sin \alpha)$$

$$\alpha = \cos^{-1} (n_N : \dot{\sigma}^P / |\dot{\sigma}^P|)$$

$$\beta = \cos^{-1} (n_N : \dot{\epsilon}^P / |\dot{\epsilon}^P|)$$

α, β はそれぞれ応力増分及び塑性ひずみ増分の n_N の方向からの振れ角であり, β は α に依存するとし, さらに塑性ひずみ増分に関する無次元パラメータ $\mu(\alpha)$ を導入して $\dot{\sigma}$ と $\dot{\epsilon}^P$ の間に次の関係を仮定している.

$$\dot{\sigma} = H' \overline{\dot{\epsilon}^P} / \mu(\alpha) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここで, H' は順方向負荷における加工硬化係数で, また $\mu(\alpha)$ は例えば Mises 型関数を塑性ポテンシャルとする従来の J_2 -F 則の場合は $\cos(\alpha)$ に一致し, かつ $\beta(\alpha) = 0$ となる.

【有限要素多結晶体モデル】

本研究では加工硬化材に対し接線係数法を適用するものとし, 有限要素法プログラムを次の仮想仕事の原理に基づいて開発した.

$$\int_V \{ (S_{ij}^J - 2S_{ik}E_{kj}) \delta E_{ij} + S_{jk}L_{ik} \delta L_{ij} \} dV = \int_{S_t} \delta v_i dS + \int_V b_i \delta v_i dV \quad \dots \dots \dots (3)$$

なお, 応力ひずみ関係における応力増分として Kirihoff 応力の Jaumann 増分 $\delta^J S_{ij}$ を, そしてひずみ増分には Stretching Tensor δE_{ij} を採用し,

$$\delta^J S_{ij} = D_{ijkl} \delta E_{kl} \quad \dots \dots \dots (4)$$

と構成関係を記述する. 但し, (4)式以下における $\delta(\)$ は () の増分量を示すものとし, D_{ijkl} の内容は以下に述べる単結晶に関する塑性力学を反映しなければならない.

まず, 結晶軸共回転増分 $\{ \delta^C \sigma \}$ と結晶座標系弾性ひずみ増分 $\{ \delta e^E \}$ との間に次式が成立する.

$$\{ \delta^C \sigma \} = [C_e] \{ \delta e \} - [C_e] \{ \delta e^P \} = [C_e] \{ \delta e \} - [C_e] [T]^T \{ \delta \gamma^P \} \quad (5)$$

結晶軸座標系において評価された応力の Jaumann 増分 $\{ \delta^J \sigma \}$ および結晶軸共回転増分 $\{ \delta^C \sigma \}$ との間に次式が成立する.

$$\{ \delta^J \sigma \} = \{ \delta^C \sigma \} + [\omega_s] \{ \sigma \} \quad (6)$$

但し、 $[\omega_s]$ は結晶すべり変形に起因する見かけの
 スピンである。各すべり系上のせん断応力増分に対し
 て次の関係が成立する。

$$\{\delta \tau\} = [T] \{\delta^c \sigma\} \quad \dots (7)$$

なお、せん断応力増分とせん断ひずみ増分の間に
 次式を仮定する。

$$\{\delta \tau\} = [h_{ab} \text{sign}(\tau_b)] \{\delta \gamma^p\} \quad \dots (8)$$

但し、 $h_{ab} = H' \{q + (1 - q)\delta_{ab}\}$ で q は潜在硬化の
 程度を示すパラメータである。さて、(5)~(8)式より次
 式を得る。

$$[h_{ab} \text{sign}(\tau_b)] \{\delta \gamma^p\} = [T] ([C e] \{\delta \varepsilon\} - [C e][T]^T \{\delta \gamma^p\}) \quad (9)$$

(9)式を $\{\delta \gamma^p\}$ について解くと次式を得る。

$$\{\delta \gamma^p\} = [\Gamma] \{\delta \varepsilon\} \quad \dots (10)$$

但し、 $[\Gamma] = [P]^{-1}[T][C e]$

$$[P] = [h_{ab} \text{sign}(\tau_b)] + [T][C e][T]^T + [T][T_s] \quad \dots (11)$$

(5), (6), および $[\omega_s]\{\sigma\} = [T_s][\gamma^p]$ なる $[T_s]$ を導
 入して(11)式より次式を得る。

$$\{\delta^j \sigma\} = [C e] ([I] - ([T]^T [C e]^{-1} [T_s]) [T]) \{\delta \varepsilon\} \quad \dots (12)$$

これを基準座標系における関係に整理すると次式とな
 る。

$$\{\delta^j S\} = [\Psi]^{-1} \{\delta^j \sigma\} = [D] \{\delta E\}$$

ただし、

$$[D] = [\Psi]^{-1} [C e] ([I] - ([T]^T [C e]^{-1} [T_s]) [T]) [\Phi] \quad (13)$$

結局、(13)式で得られた構成関係マトリクスを用いて剛性マ
 トリクスを構築することとなる。なお、変形増分の大きさ
 については r_{mb} 法を採用した。

【多結晶モデルと計算条件】

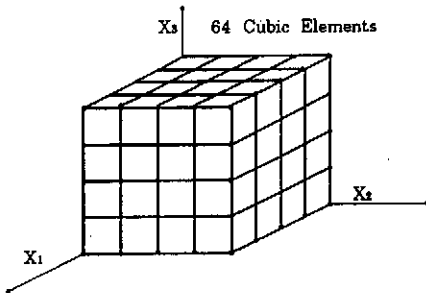


Fig.1 Finite-element divisions of a polycrystalline model block introduced in the study

3次元要素としては 8 Gauss 積分点評価の 8 節点ア
 イソパラメトリック要素を用いた。また単結晶体の力
 学的特性としては、縦弾性率 $E = 70.56 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$,
 初期せん断降伏応力 $Y = 196 \text{ Mpa}$, 加工硬化係数 $H' =$
 784 Mpa , 潜在硬化パラメータについては $q = 1.2$ とし
 て、FCC材に対し12すべり系を仮定し計算を行った。
 本研究においては応力増分方向依存性に関する調
 査が主たる関心事項であるから、単結晶の加工硬化則
 としては単純な線形硬化則を仮定している。多結晶体

モデルとしては Fig.1 に示すように各要素を単結晶と
 する 64 個の要素からなる立方体ブロックを導入した。
 これに節点力を与えて変形を生じさせ、巨視的応力 S_{AVE}
 S_{AVE} は各要素中の応力 S を平均することにより求め、
 また巨視的ひずみ E_{AVE} についても同様にした。ある負
 荷径路に沿って一定の変形を生じせしめた後これを基
 準状態とし、そこから負荷径路の向きを種々変え次式
 より求められる巨視的塑性ひずみ増分より $\mu(\alpha)$ およ
 び $\beta(\alpha)$ を求める。

$$\{\delta E^p_{AVE}\} = \{\delta E_{AVE}\} - [D e]^{-1} \{\delta S_{AVE}\} \quad (14)$$

3. 計算結果

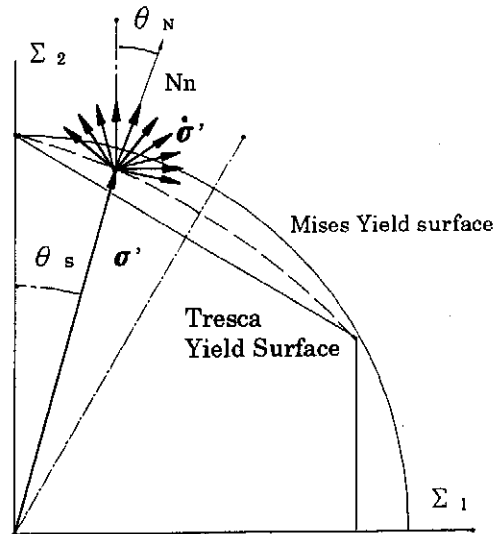


Fig.2 Definition of initial loading direction angle θ_s and natural direction θ_N in a two dimensional subspace of Il'yshin's stress space

初期負荷方向角 $\theta_s (= \arctan \Sigma_2 / \Sigma_1)$ と順方向角 θ_N
 $(= \arctan Nn_2 / Nn_1 : Nn_1$ は Nn の成分) の定義がイ
 リューシンの偏差応力空間の 2 次元部分空間において
 示されている (Fig.2)。ただし、ここで $\Sigma_1 = S_{11} - (S_{22} + S_{33})/2$
 であり、 $\Sigma_2 = \sqrt{3}(S_{22} - S_{33})/2$ と定義されている。例えば、
 Fig.3 は、初期応力状態として単軸比例負荷応力状態
 $(\theta_s = 0^\circ)$ を設定し、これに沿って一定の変形を与えた
 後に、その時の単軸応力状態から急激に応力増分方向
 を種々変化させた時の増分的相当応力と相当塑性ひず
 み増分の関係、すなわち増分的応力ひずみ曲線を示す。
 また、Fig.4 は塑性ひずみ増分方向変化角 β の変化を示
 すものであるが、塑性ひずみ増分の向きを示す β が応
 力増分の向き α によって大きく異なるものであること
 が明らかである。一方、初期負荷が純粋せん断の場合
 の結果を Fig.5 と Fig.6 に示す。Fig.5 の結果より純粋
 せん断方向においても僅かながら方向依存性が観られる。
 Fig.3 から Fig.6 までの結果を整理して、それぞれの負
 荷方向に対する $\mu(\alpha)$ と $\beta(\alpha)$ を得ることが出来るが、
 その様子を Fig.7 に纏めて α の関数として示す。明ら
 かに応力増分方向依存性が存在することが分かり、特に
 単軸負荷方向に対して著しいことが示されている。

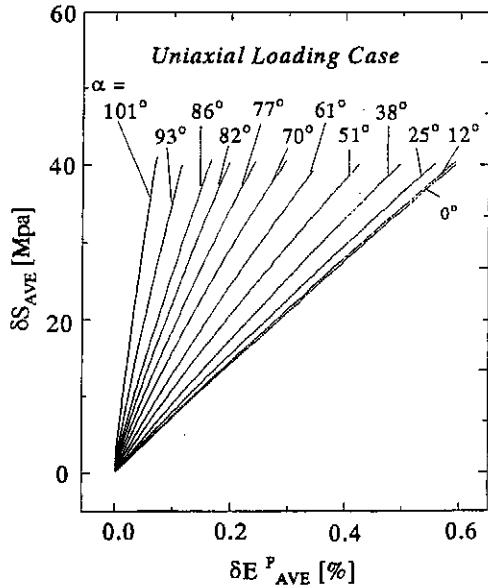


Fig.3 Incremental stress-strain curves after abrupt change of loading direction from uniaxial loading.

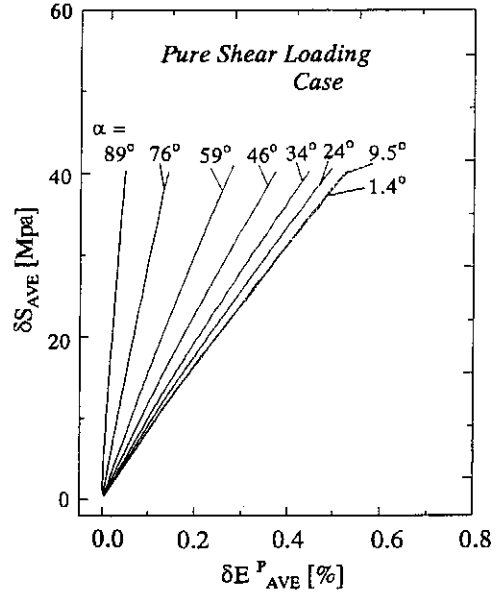


Fig.5 Incremental stress-strain curves for after abrupt change of loading direction from pure shear loading.

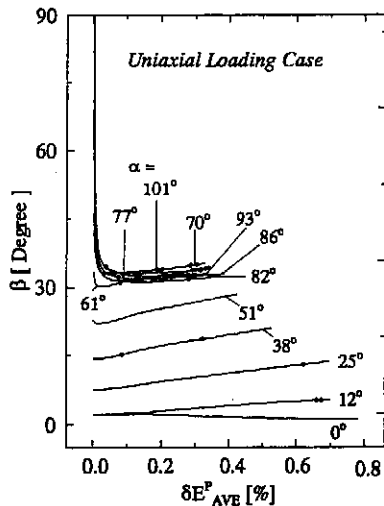


Fig.4 Variation of β after abrupt change of loading direction from uniaxial loading

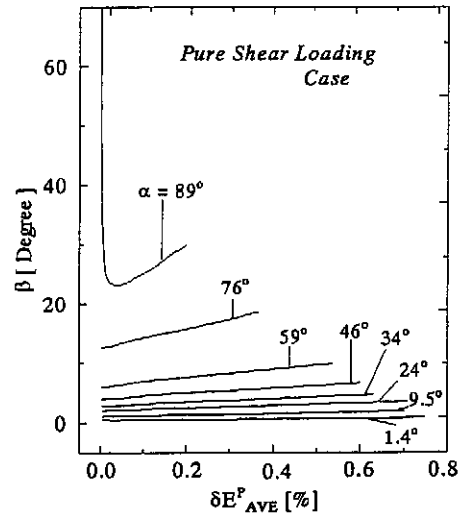


Fig.6 Variation of β after abrupt change of loading direction from pure shear loading.

さらに、この2つの方向の間に位置する初期荷荷方向に対する結果を Fig.8 から Fig.10 に示す。これらの結果は前の2つの方向に対する結果の中間的な傾向を示しているが、単軸荷荷方向に近づくほど方向依存性が大きく現れていることが分かる。また、偏差応力増分角 α が 60° までは β は α に比例して増加していることが分かる。こうした結果は、高橋等によってなされた Lin モデルを用いて得られた傾向⁽⁷⁾を裏づけるものであり、単軸荷荷方向に対し塑性ひずみ増分の振れ角 $\beta(\alpha)$ が大きくなり、純粋せん断方向に対しては完全に零ということだけでなく、小さいながらある程度の $\beta(\alpha)$ が存在することを示した。

4. 結論

Fig. 7 から Fig. 10 で示された各初期荷荷方向に対する $\alpha=60^\circ$ における β の値 β_{60} を初期荷荷方向角 θ_s の関数として整理した結果を Fig. 11 に示す。これら数値データの最小自乗近似曲線は、例えば次式 $\beta_{60} = 28.808 - 1.6474 \theta_s + 0.029145(\theta_s)^2$ で与えられる。これにより、 $\alpha=0^\circ$ から $\alpha=60^\circ$ の範囲において $\beta(\alpha)$ を直線で近似し、その後 $\alpha=90^\circ$ において $\beta=30^\circ$ となる折れ線で近似し、 $\beta(\alpha)$ を表すことが可能となり、また $\mu(\alpha)$ については、 $\alpha > 90^\circ$ の領域においては塑性ひずみ増分の大きさがかなり小さいので、 α の全領域に対して単純に $\cos \alpha$ と近似することができる。さら

に, Fig. 12 は順方向角 θ_n の初期負荷方向角 θ_s の関数として整理した結果を示す. 例えば, $\theta_n = 2.72775 \theta_s - 0.11362(\theta_s)^2 + 0.26075 \times 10^{-2}(\theta_s)^3 - 0.24965 \times 10^{-4}(\theta_s)^4$ なる最小自乗近似曲線で表すことができ, これ で順方向角が決定できる.

従って, 順方向角 θ_n , 塑性ひずみ増分振れ角 $\beta(\alpha)$ 及び $\mu(\alpha)$ を初期負荷方向角 θ_s の関数として具体的に決定できたことになり, 筆者等の提案する塑性構成関係の表現(1)式を実用に供する形で完結することができた. なお, 本研究における一連の計算を通して, 等方塑性材料に対して降伏条件は滑らかな曲面により形成される Mises 型関数で十分に近似が可能であるが, だからと言ってこのことが直ちに古典的塑性ポテンシャル理論に基づく塑性ひずみ法線則の妥当性を意味するものではないことが明らかにされた. すなわち, 応力評価に基づく降伏条件と塑性ひずみ増分の方向性とは独立に扱われるべきものであることが示唆されるのである.

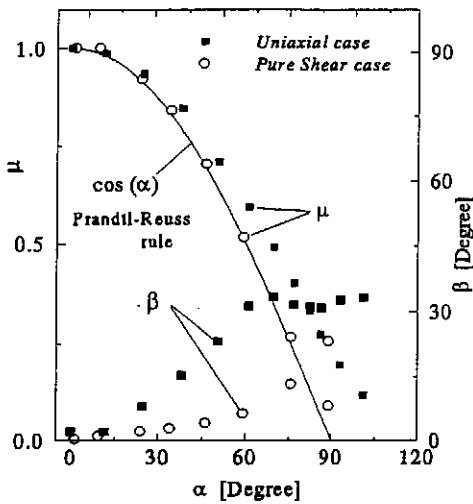


Fig.7 Variations of constitutive parameters obtained using F.E. Polycrystalline mode.

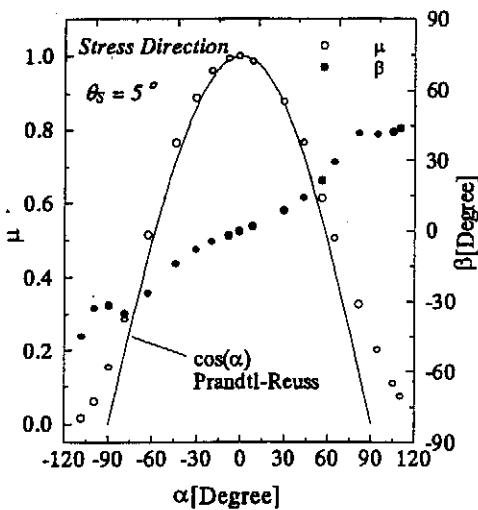


Fig.8 Variations of constitutive parameters obtained using F.E.P.M.: for a direction between uniaxial and pure shear loading $\theta_s = 5^\circ$

塑性構成式(1)の表現は順方向を導入することで応用性の高い形となっている. 例えば順方向ベクトル \mathbf{nN} を与えるポテンシャル(従来の古典理論における塑性ひずみ増分の方向を決定する塑性ポテンシャルとは異なる役割のものであることに注意)を導入することにより異方性材料に対する構成式にも直ちに展開し得るものであることは容易に推察できる. 今後は, 本研究で構築された有限要素多結晶モデルを用いることにより, 従来は実材料の実験においては極めて困難なために行われることの無かった各種の応力履歴・ひずみ履歴の問題について調べていく予定である.

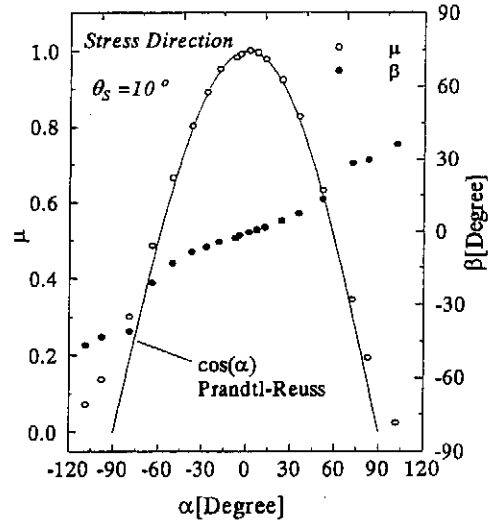


Fig. 9 Variations of constitutive parameters obtained using F.E.P.M.: for a direction between uniaxial and pure shear loading $\theta_s = 10^\circ$

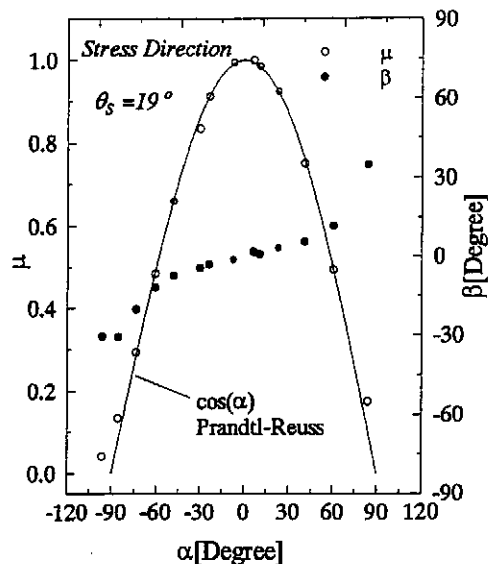


Fig. 10 Variations of constitutive parameters obtained using F.E.P.M.: for a direction between uniaxial and pure shear loading $\theta_s = 19^\circ$

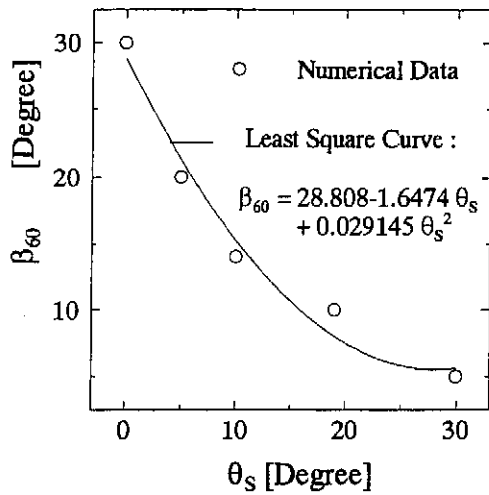


Fig. 11 Relation between β_{60} and θ_s

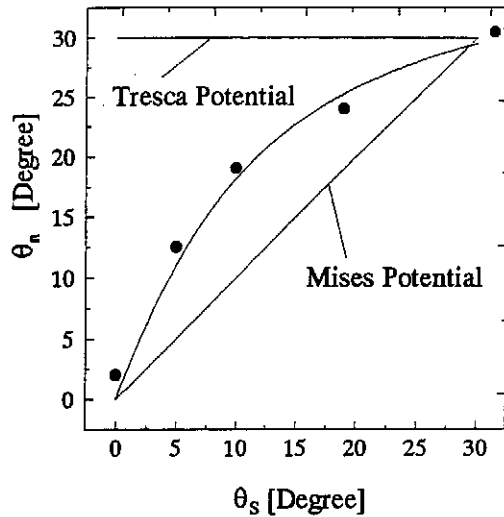


Fig.12 Relation between natural direction θ_n and loading direction θ_s

5. 謝 辞

本研究は天田金属加工機械技術財団の補助金(平成6年度:AF-93006)で行った。記して、深甚なる感謝の意を表します。

6. 参考文献

- (1)Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 27-516(1979), 465
- (2)後藤, 機論, 48-424, A(昭5), 1389
- (3)呉屋・伊藤, 機論, 54-504, A(昭63),1617
- (4)Kroner,E.,Acta Metall.,9(1961),155
- (5)Budiansky,B. and Wu,T.T., Proc.4th Congr.Appl. Mech.,2(1962),1175.
- (6)Ito,K.,The Technology Reports of the Tohoku University, 44(1979),199
- (7)Takahashi,H.,Ito,K. and Goya,M.,Int. Jour. Plasticity, 6(1990),615
- (8)神馬・室田・一柳, 機誌, 75(1972),602
- (9)宮本・石島・三好, 機誌, 75(1972),575
- (10)後藤, 機論, 43(1977), 3723